УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Є.М. Борисов, Л.Є. Борисова

# ДЕФОРМАЦІЯ ПРУЖНОЇ НЕОДНОРІДНОЇ СФЕРИ ПРИ ЧАСТИННОМУ ВИДІ НАВАНТАЖЕННЯ

Розглядається внутрішня просторова задача для пружної неоднорідного сфери при симетричному навантаженні. Відповідні однорідні задачі розв’язані аналітично точно в роботах [1], [2], при цьому компоненти переміщень та напружень мають вигляд рядів по поліномам Лежандра. Неоднорідність матеріалу суттєво ускладнює розв’язання просторових задач теорії пружності, а отримати аналітичні розв’язки, як правило, вдається при деяких обмеженнях або при застосуванням наближених методів [3].

В роботі представлено розв’язок задачі для неоднорідної сфери при ідеальному контакті між півсферами. Досліджено напружено - деформівний стан неоднорідної сфери у випадку, коли на її поверхні задано симетричне навантаження. Отримані результати порівнюються із відомими [1].

Розглянемо пружну сферу, що розділена площиною $\theta = \frac{\pi}{2}$ на дві півсфери (верхню та нижню), між якими виконуються умови ідеального контакту. Введемо сферичну систему координат $R, \theta, \varphi$, при цьому: $0 \le R \le R_0$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. У випадку симетрично навантаженого тіла обертання явище деформації відбувається однаково у всіх меридіанних площинах ($\varphi = const$). Тоді компоненти напружень та переміщень не будуть залежати від кута $\varphi$. При цьому вважатимемо, що верхній півсфері відповідає пружний матеріал зі сталими $m_1, G_1$, а нижній – $m_2, G_2$, де $m$ - число Пуассона, $G$ - модуль зсуву.

Виходячи з розв’язків рівнянь теорії пружності у формі Папковича-Нейбера, запишемо вирази проекцій переміщень на осі сферичної системи координат у вигляді:

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{4(m-1)}{m} B_R - \frac{\partial}{\partial R}(RB_R + B_0), \\ u_\theta &= \frac{4(m-1)}{m} B_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta}(RB_R + B_0). \end{aligned} \tag{1}$$

де $B_{R,}\ B_\theta$ - функції, що мають вигляд [1]:

$$B_R = R^n(A\frac{dP_n}{d\theta}\sin\theta + A^*\cos\theta P_n),$$
$$B_\theta = R^n(A\frac{dP_n}{d\theta}\cos\theta - A^*\sin\theta P_n). \tag{2}$$

А функцію $B_0$ в даній роботі пропонується вибрати у наступному вигляді:

$B_0 = -BR^{n+1}P_{n+1}$,

де $P_n = P_n(\cos\theta)$ - поліном Лежандра $n-$го порядку ($n = 0, 1, 2, ...$):

$$P_n(p) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dp^n}(p^2-1)^n,\ p = \cos(\theta),$$

а $A, A^*, B$ - невідомі сталі.

Запишемо формули, які дають вирази для напружень у сферичній системі координат, коли переміщення $u_R, u_\theta$ не залежать від кута $\varphi$:

$$\sigma_R = 2G\frac{\partial u_R}{\partial R},\quad \sigma_\theta = 2G(\frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{R}u_R),\quad \sigma_\varphi = 2G\frac{1}{R}(u_\theta ctg\theta + u_R),$$
$$\sigma_{R\theta} = G(\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial\theta} + R\frac{\partial}{\partial R}(\frac{u_\theta}{R})) \tag{3}$$

Нехай на площині $\theta = \frac{\pi}{2}$ виконуються умови ідеального контакту, які запишемо у вигляді:

$$u_R^1 = u_R^2;\qquad \sigma_\theta^1 = \sigma_\theta^2; \tag{4}$$
$$u_\theta^1 = u_\theta^2;\qquad \sigma_{R\theta}^1 = \sigma_{R\theta}^2 \tag{5}$$

В цих виразах тут і далі верхні індекси 1 та 2 вказують на компоненти переміщень та напружень, які відносяться до верхньої та нижньої півсфер відповідно.

Розглянемо випадок, коли на поверхні сфери задано навантаження в такому вигляді:

$$\overline{\sigma_R^1}\Big|_{R=R_0} = -q\cos^2\theta;\quad \overline{\sigma_R^2}\Big|_{R=R_0} = -q\cos^2\theta, \tag{6}$$

$$\overline{\sigma_{R\theta}^1}\Big|_{R=R_0} = \frac{1}{2}q\cos\theta\sin\theta;\quad \overline{\sigma_{R\theta}^2}\Big|_{R=R_0} = \frac{1}{2}q\cos\theta\sin\theta, \tag{7}$$


ISSN 1562-9945

де $\overline{\sigma_R^1}$, $\overline{\sigma_{R\theta}^1}$ - напруження, які задані на верхній півсфері, а $\overline{\sigma_R^2}$, $\overline{\sigma_{R\theta}^2}$ - на нижній. В цих формулах $q$ - довільна стала. При цьому напруження $\sigma_R, \sigma_{R\theta}$ вважаються додатними, коли навантаження направлено в бік зростання $R$ (від центра сфери) і відповідно кута $\theta$.

Якщо у виразах (1), (2) покласти $n{=}1$, то отримаємо

$$u_R^{1(2)} = R\left[\cos^2\theta\left((A^{1(2)} + A^{*1(2)})\left(\frac{4(m_{1(2)}-1)}{m_{1(2)}} - 2\right) + 3B^{1(2)}\right) - A^{1(2)}\left(\frac{4(m_{1(2)}-1)}{m_{1(2)}} - 2\right) - B^{1(2)}\right];\tag{8}$$

$$u_\theta^{1(2)} = -R\cos(\theta)\sin(\theta)\left((A^{1(2)} + A^{*1(2)})\left(\frac{4(m_{1(2)}-1)}{m_{1(2)}} - 2\right) + 3B^{1(2)}\right).\tag{9}$$

Вирази для напружень знаходимо підставивши (8), (9) в (3).

При цьому, умови контакту будуть виконуватись, якщо у виразі (8) покласти

$$A^{1(2)}\left(\frac{4(m_{1(2)}-1)}{m_{1(2)}} - 2\right) + B^{1(2)} = 0.\tag{10}$$

Граничні умови (6), (7) будуть виконуватись при умові

$$2G_1\left((A^1 + A^{*1})\left(\frac{4(m_1-1)}{m_1} - 2\right) + 3B^1\right) = -q,\tag{11}$$

$$2G_2\left((A^2 + A^{*2})\left(\frac{4(m_2-1)}{m_2} - 2\right) + 3B^2\right) = -q.$$

Розв’язавши рівняння (10), (11), отримаємо наступні частинні розв’язки

$$u_R^1 = -R\cos^2\theta\frac{q}{2G_1};\; u_R^2 = -R\cos^2\theta\frac{q}{2G_2}$$

$$u_\theta^1 = R\cos\theta\sin\theta\frac{q}{2G_1};\; u_\theta^1 = R\cos\theta\sin\theta\frac{q}{2G_2}$$

$$\sigma_R^1 = \sigma_R^2 = -q\cos^2\theta;\tag{12}$$

$$\sigma_{R\theta}^1 = q\cos\theta\sin\theta;\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

$$,$$

$$\sigma_{R\theta}^2 = q\cos\theta\sin\theta;\quad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi,$$

$$\sigma_\theta^1 = \sigma_\theta^2 = -q\sin^2\theta;$$

Як видно з приведених виразів, напруження в даному випадку не залежать від радіуса $R$ і залишаються для кожного фіксованого кута $\theta$ однаковими (по модулю) для верхньої та нижньої півсфер. Однак, переміщення для верхньої та нижньої півсфер залежать як від кута $\theta$, так і від радіуса і відрізняються одне від одного (при кожному фіксованому значенні $\theta$ та $R$) на величину, яка залежить від модуля зсуву матеріалу. Якщо, наприклад, $G_1 \succ G_2$, то переміщення для верхньої півсфери будуть меншими на величину, що пропорційна $q\dfrac{G_1 - G_2}{G_1 G_2}$ від переміщень нижньої півсфери, що відповідає механічним властивостям матеріалу.

Розглянемо ще один частинний випадок. Якщо у виразах (1), (2) покласти $n=0$, то по аналогії до [1] отримаємо другий частинний розв’язок:

$$u_R^{1(2)} = \cos\theta\left(A^{*1(2)}\left(\frac{4(m_{1(2)}-1)}{m_{1(2)}}\right) - A^{*1(2)} + B^{1(2)}\right);$$

$$u_\theta^{1(2)} = -\sin\theta\left(A^{*1(2)}\left(\frac{4(m_{1(2)}-1)}{m_{1(2)}}\right) - A^{*1(2)} + B^{1(2)}\right),$$

що являє собою жорстке зміщення. І не важко переконатись, що відповідні напруження будуть дорівнювати нулю. Умови контакту будуть виконуватись , якщо в останніх виразах покласти:

$$A^{*1(2)}\left(\frac{4(m_{1(2)}-1)}{m_{1(2)}}\right) - A^{*1(2)} = 0. \qquad (13)$$

Тоді, з врахуванням (13) вирази для переміщень співпадають з результатами, що отримані в роботі [1].

При цьому, слід відмітити, що система напружень, яка розподілена по поверхні сфері $R = R_0$ статично еквівалентна нулю. Для цього достатньо переконатись, що проекція головного вектора на вісь $z$ дорівнює нулю:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\sigma_R \cos(\theta) - \sigma_{R\theta}\sin(\theta)) R_0^2 \sin(\theta) d\theta \quad =$$

$$= 2\pi R_0^2 \left( \int_{-1}^{0} (\sigma_R^2 \cos(\theta) - \sigma_{R\theta}^2 \sin(\theta)) d\cos(\theta) + \int_0^1 (\sigma_R^2 \cos(\theta) - \sigma_{R\theta}^2 \sin(\theta)) d\cos(\theta) \right).$$


ISSN 1562-9945

Підставивши (12) в останній вираз, неважко переконатися, що даний інтеграл дорівнює нулю.

Таким чином, в роботі отримано частинний розв’язок задачі про деформацію симетрично навантаженої неоднорідної пружної сфери при ідеальному контакті між півсферами. Отримані результати показують, що переміщення для верхньої та нижньої півсфер залежать від пружних властивостей матеріалу, з яких виготовлені півсфери. В частинному випадку отримані результати співпадають з відомими [1].

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Лур’є А.И. Пространственные задачи теории упругости.- М. Гостехиздат, 1955.
2. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. –Киев Наукова думка, 1979., -240 с.
3. Е. Н. Борисов О нелинейно упругом равновесии прямоугольной многослойной плиты/ Прикладная механика. – 2002. - 38 , № 4. – С. 87-92.

Получено 03.05.2008 г.