УДК 534-21

К.В. Медведєв, В.М. Шульга, В.Ф. Корнієнко, І.О. Ластівка

ДИСПЕРСІЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ КІЛОГЕРЦЕВОГО ДІАПАЗОНУ В ФІБРИЛЬНИХ НИТКАХ

Акустичні методи дослідження фізико-механічних властивостей полімерних і композитних матеріалів належать до найбільш інформативних і охоплюють широкий частотний інтервал. Ідентифікація результатів вимірювань, що спирається на фізичні моделі хвильових процесів, залежить від ступеня неоднорідності матеріалу і частот збурення. Теорія поширення акустичних хвиль кілогерцевого діапазону в фібрильних нитках ґрунтується на принципі гомогенізації композитних матеріалів і теорії пружності анізотропного твердого тіла.

Фібрильна нитка є суцільним круговим циліндром з діаметром $2r_2$. В циліндричній системі координат $or\theta z$, вісь oz якої співпадає з віссю циліндру, рівняння осесиметричних коливань деформацій твердого тіла мають вигляд

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z},$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rz}}{r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}. \qquad (1)$$

При довжинах хвиль, що значно перевищують розміри неоднорідності структури матеріалу, справедливий континуальний опис його деформативних властивостей [2, 3]. В такому випадку фізичні компоненти тензора напружень пов'язані з фізичними компонентами тензора деформацій матеріальними співвідношенням

$$\sigma_{rr}=c_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r}+c_{12}\frac{u_r}{r}+c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{\theta\theta}=c_{12}\frac{\partial u_r}{\partial r}+c_{11}\frac{u_r}{r}+c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{zz}=c_{13}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\right)+c_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{rz}=c_{55}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right). \qquad (2)$$

Рівняння (1) і (2) виконуються у всіх внутрішніх точках суцільного циліндра $0 \le r < r_2$, а на його боковій поверхні мають місце однорідні граничні умови.

$$\sigma_{rr}(r_2, z, t) = 0, \; \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0. \tag{3}$$

Модулі пружності c_{ij} і густина ρ конкретних матеріалів знаходяться експериментально, для композитних матеріалів макроскопічні пружні властивості і густина композиції як однорідного матеріалу визначаються теоретично по властивостям компонент і його геометричній структурі [2, 3].

Теорія хвиль, що поширюються вздовж осі циліндру, заснована на представленні хвилі виразами

$$u_r(r, z, t) = r_2 \operatorname{Re} u_1(r/r_2) \exp i(kz - \omega t),$$
$$u_z(r, z, t) = r_2 \operatorname{Re} u_3(r/r_2) \exp i(kz - \omega t - \pi/2) \tag{4}$$

для переміщень u_r і u_z. Кругова частота ω і постійна поширення k пов'язані з фазовою швидкістю $\upsilon_ф$ формулою $k\upsilon_ф = \omega$ (при дійсному хвильовому числі k).

Після підстановки формул (4) в співвідношення (2), (1) і (3) одержимо систему двох звичайних диференціальних рівнянь

$$c_{11}\left(u_1'' + \frac{1}{\bar{r}}u_1' - \frac{1}{\bar{r}^2}u_1\right) + \left(\rho\omega^2 - c_{55}k^2\right)u_1 + \bar{k}\left(c_{13} + c_{55}\right)u_3' = 0,$$

$$-\bar{k}\left(c_{13} + c_{55}\right)\left(u_1' + \frac{1}{\bar{r}}u_1\right) + c_{55}\left(u_3'' + \frac{1}{\bar{r}}u_3'\right) + \left(\rho\omega^2 - c_{33}k^2\right)u_3 = 0 \tag{5}$$

відносно амплітудних функцій $u_1(\bar{r})$ і $u_3(\bar{r})$ і граничні умови до них

$$c_{11}u_1'(1) + c_{12}u_1(1) + \bar{k}c_{13}u_3(1) = 0, \; c_{55}\left(u_3'(1) - \bar{k}u_1(1)\right) = 0. \tag{6}$$

В залежностях (5), (6) штрихом позначені похідні по безрозмірній радіальній координаті $\bar{r} = r/r_2$ і використані безрозмірні частота $\bar{\omega} = \omega r_2\sqrt{\rho_0/c_0}$, постійна поширення $\bar{k} = kr_2$, пружні сталі $\bar{c}_{ij} = c_{ij}/c_0$ і густина $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$. Параметри c_0 і ρ_0 мають розмірності пружної сталої і густини відповідно, риска зверху в безрозмірних величинах $\bar{c}_{ij}$ та $\bar{\rho}$ опущена (на використання безрозмірних $\bar{c}_{ij}$ та $\bar{\rho}$ вказують безрозмірні $\bar{\omega}$ і $\bar{k}$).

Розв'язок рівнянь (5) можна виразити через циліндричні функції, проте простішим і ефективнішим є безпосереднє розкладання функцій $u_1(\bar{r})$ і $u_3(\bar{r})$ в степеневі ряди по радіальній координаті [4, 5, 6].

У рівняннях (5) змінна координата $\bar{r}$ змінюється в межах $0 \le \bar{r} < 1$ і тому їх коефіцієнти мають особливу точку типу полюс при $\bar{r} = 0$. Оскільки ця особлива точка є регулярною, то розв’язок системи (5) в області $0 \le \bar{r} < 1$ потрібно шукати у вигляді узагальнених степеневих рядів

$$u_1(\bar{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)} \bar{r}^{\,n+s}, \quad u_3(\bar{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(3)} \bar{r}^{\,n+s}. \tag{7}$$

Підставимо ряди (7) в рівняння (5), зберемо коефіцієнти при однакових степенях $\bar{r}$ і прирівняємо їх нулеві. В результаті отримаємо алгебраїчні залежності

$$\left((n+s)^2 - 1\right) c_{11} B_n^{(1)} + (n+s-1)(c_{13} + c_{55}) \bar{k} B_{n-1}^{(3)} + \left(\rho\bar{\omega}^2 - c_{55}\bar{k}^2\right) B_{n-2}^{(1)} = 0,$$
$$(n+s)^2 c_{55} B_n^{(3)} - (n+s)(c_{13} + c_{55}) \bar{k} B_{n-1}^{(1)} + \left(\rho\bar{\omega}^2 - c_{33}\bar{k}^2\right) B_{n-2}^{(3)} = 0,$$
$$B_{-2}^{(j)} \equiv A_{-1}^{(j)} \equiv 0, \quad j = 1,3, \quad n = 0,1,2,..., \tag{8}$$

з яких визначається характеристичний показник s і коефіцієнти рядів $B_n^{(1)}$ і $B_n^{(3)}$, $n = 0,1,2,...$.

З граничних умов (6) внаслідок підстановки в них рядів (7) одержимо два рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((c_{11}(n+s) + c_{12}) B_n^{(1)} + c_{13} \bar{k} B_{n-1}^{(3)}) = 0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{55} \left(-\bar{k} B_{n-1}^{(1)} + (n+s) B_n^{(3)}\right) = 0. \tag{9}$$

Перейдемо до визначення характеристичних параметрів s і коефіцієнтів $B_n^{(1)}$ і $B_n^{(3)}$ рядів. Поклавши в формулах (8) індекс $n = 0$, отримаємо

$$c_{11}\left(s^2 - 1\right) B_0^{(1)} = 0, \quad c_{55} s^2 B_0^{(3)} = 0. \tag{10}$$

Звідси випливає, що при $s_1 = 1$ і $s_4 = -1$ постійна $B_0^{(1)} \ne 0$, а $B_0^{(3)} = 0$, тоді як при $s_2 = s_3 = 0$ постійна $B_0^{(1)} = 0$, а $B_0^{(3)} \ne 0$.

При $s = 0$ рекурентна система (8) набирає вигляду

$$c_{11}\left(n^2 - 1\right) B_n^{(1)} + (n-1)(c_{13} + c_{55}) \bar{k} B_{n-1}^{(3)} - \left(\rho\bar{\omega}^2 - c_{55}\bar{k}^2\right) B_{n-2}^{(1)} = 0,$$
$$c_{55} n^2 B_n^{(3)} - n(c_{13} + c_{55}) \bar{k} B_{n-1}^{(1)} - \left(\rho\bar{\omega}^2 - c_{33}\bar{k}^2\right) B_{n-2}^{(3)} = 0, \tag{11}$$

а граничні умови (9) запишуться так

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n c_{11} + c_{12}) B_n^{(1)} + c_{13} \bar{k} B_{n-1}^{(3)}\right] = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(n B_n^{(3)} - \bar{k} B_{n-1}^{(1)}\right) = 0. \tag{12}$$

З формул (11) при $n = 0$, як і з формул (10) при $s = 0$, випливає, що сталі $B_0^{(1)} = 0$ і $B_0^{(3)} \ne 0$. При $n = 1$ з (11) маємо два рівняння $0 \cdot B_1^{(1)} + 0 \cdot B_0^{(3)} = 0$, $c_{33} B_1^{(3)} - (c_{13} + c_{55}) \bar{k} \cdot B_0^{(1)} = 0$. Перше з них буде виконуватися при довільних $B_1^{(1)} \ne 0$ і $B_0^{(3)} \ne 0$, тоді як з другого

 ISSN 1562-9945

рівняння маємо $B_1^{(3)}=0$ при $B_0^{(1)}=0$. Всі наступні сталі $B_2^{(j)}, B_3^{(j)},...$ визначаються з рекурентних формул (11) через $B_0^{(3)}$ і $B_1^{(1)}$. Очевидно, що переміщення u_r розкладається по непарних степенях $\bar{r}$, а переміщення u_z – по парних степенях $\bar{r}$.

Алгоритм виведення дисперсійного співвідношення в загальному випадку полягає в наступному. По формулах (11) при $n=2,3,...$ виражаємо коефіцієнти $B_3^{(1)}$, $B_5^{(1)}$,..., $B_2^{(3)}$, $B_4^{(3)}$,...через два перших $B_0^{(3)}$ і $B_1^{(1)}$, так як $B_0^{(1)}=B_1^{(3)}=0$. Підставляємо одержані вирази в граничні умови (12) з врахуванням рівностей $B_0^{(1)}=B_2^{(1)}=...=0$, $B_1^{(3)}=B_3^{(3)}=...=0$. В результаті одержимо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$m_{11}B_0^{(3)}+m_{12}B_1^{(1)}=0\,,\ \ m_{21}B_0^{(3)}+m_{22}B_1^{(1)}=0\,. \qquad (13)$$

Умова сумісності однорідної системи (13)

$$\det\left\{m_{\alpha\beta}\left(c_{ij},\rho,\varepsilon,\bar{k},\bar{\omega}\right)\right\}=0\,, \qquad (14)$$

є дисперсійним співвідношенням, що дозволяє при заданих пружних постійних і густині знайти залежність постійної поширення $\bar{k}$ від частоти $\bar{\omega}$, а потім фазову $\upsilon_{ф}=\frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}\sqrt{\rho_0/c_0}$ та групову $\upsilon_{гр}=\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{k}}\sqrt{\rho_0/c_0}$ швидкості хвиль в фібрильній нитці. Форма хвилі по радіальній координаті $\bar{r}$ визначається по відповідному нетривіальному розв’язку однорідної системи алгебраїчних рівнянь (13), рекурентних залежностях (11), рядах (7), формулах (4) і (2).

Викладений розв’язок має таку ж загальність, точність і можливість аналізу спектральних властивостей суцільного циліндру, як і розв’язок в циліндричних функціях. Єдине ускладнення виникає при великих частотах і великих значеннях постійної поширення, коли обчислювальний процес по створеному алгоритму може стати нестійким. При кількісному аналізі поширення хвиль в фібрильних нитках така ситуація може мати місце в мегагерцевому діапазоні.

Зупинимося більш детально на аналізі дисперсійного співвідношення (14) для циліндрів з діаметрами малих хвильових розмірів (при $\bar{k}\ll 1$).

Залишимо в рядах (7) члени, що містять степені $\bar{r}$ не вище другої

$$u_1(\bar{r})=B_1^{(1)}\bar{r}\,,\ \ u_3(\bar{r})=B_0^{(3)}+B_2^{(3)}\bar{r}^{\,2} \qquad (15)$$

і відповідні цьому розкладу члени в граничних умовах (12)

$$\left(c_{11}+c_{12}\right)B_1^{(1)}+c_{13}\bar{k}B_0^{(3)}=0,\ -\bar{k}B_1^{(1)}+2B_2^{(3)}=0. \qquad (16)$$

Дисперсійне співвідношення (14) в прийнятому наближенні набуває вигляду

$$\left(c_{11}+c_{12}\right)\rho\bar{\varpi}^2-\bar{k}^2\left[c_{33}\left(c_{11}+c_{12}\right)+2c_{13}^2\right]=0. \qquad (17)$$

Якщо в рівнянні (17) перейти до розмірних величин, виразити пружні модулі c_{ij} через технічні модулі і замінити хвильове число через частоту і фазову швидкість, то одержимо залежність $\upsilon=\sqrt{E_3/\rho}$. Таким чином при низьких частотах в нитці поширюється поздовжня хвиля зі стержневою швидкістю. При більш високих частотах формула $\upsilon=\sqrt{E_3/\rho}$ незастосовна. В такому випадку в граничних умовах (12) і рекурентних залежностях (11) необхідно утримувати більшу кількість невідомих $B_n^{(j)}$, що потребує застосування комп'ютерних засобів.

Для композиції, матриця якої армована однонаправленою системою волокон, відповідно теорії сумішей [2, 3] макроскопічний поздовжній модуль Юнга і густина визначаються за формулами

$$E_3=c_mE_m+c_fE_f,\ \rho=c_m\rho_m+c_f\rho_f. \qquad (18)$$

Властивості матриці позначені через E_m, ν_m, ρ_m, властивості армуючих волокон – через E_f, ν_f, ρ_f, а їх об'ємна концентрація відповідно через c_m і c_f ($c_m+c_f=1$).

Використовуючи вирази (18) для ефективного значення модуля Юнга і густини фібрильної нитки, формулу $\upsilon=\sqrt{E_3/\rho}$ приведемо до остаточного вигляду

$$\upsilon=\sqrt{\left(E_mc_m+E_fc_f\right)/\left(\rho_mc_m+\rho_fc_f\right)}. \qquad (19)$$

В реальних умовах акустична хвиля поширюється із затуханням внаслідок поглинання енергії, механізми якого різноманітні і важко піддаються послідовному кількісному опису. Будемо виходити з способу врахування дисипативних властивостей матеріалу при гармонічних процесах за допомогою комплексних модулів для матриці і наповнювача

$$E_m=E_m'\left(1-i\delta_m\right),\ 0\le\delta_m<<1;\ E_f=E_f'\left(1-i\delta_f\right),\ 0\le\delta_f<<1.$$

Тоді з рівняння руху площини рівних фаз плоскої хвилі і формули (19) для швидкості хвилі υ' і коефіцієнта затухання α одержимо вирази

 ISSN 1562-9945

$$\upsilon' = \sqrt{\frac{E'_m c_m + E'_f c_f}{\rho_m c_m + \rho_f c_f}}, \ \alpha = \frac{\delta_m E'_m c_m + \delta_f E'_f c_f}{E'_m c_m + E'_f c_f}. \qquad (20)$$

Оскільки для швидкостей і коефіцієнтів затухання хвиль в компонентах справедливі залежності $\upsilon'_m = \sqrt{E'_m / \rho_m}$, $\alpha_m = \omega\delta_m / 2\upsilon'_m$, $\upsilon'_f = \sqrt{E'_f / \rho_f}$, $\alpha_f = \omega\delta_f / 2\upsilon'_f$, то макроскопічний коефіцієнт затухання хвилі в композиції можна виразити через коефіцієнти затухання хвиль α_m і α_f в компонентах

$$\alpha = \frac{\alpha_m \upsilon'_m E'_m c_m + \alpha_f \upsilon'_f E_f c_f}{E'_m c_m + E'_f c_f}. \qquad (21)$$

В таблиці наведені розраховані за формулою (19) значення швидкості поширення акустичної хвилі в фібрильній нитці з полікапроаміду (індекс m), що наповнений поліетиленом (індекс f)

Таблиця 1

c_f	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
υ	2638	2622	2605	2588	2571	2554	2536	2517
	1144	1141	1138	1135	1132	1129	1126	1123

Верхній рядок відповідає орієнтованому випадку, коли властивості полікапроаміду і поліетилену приймають значення $E_m = 8031 МПа$, $\rho_m = 1140 кг/м^3$, $E_f = 5000 МПа$, $\rho_f = 980 кг/м^3$, а нижній рядок – неорієнтованому випадку, коли $E_m = 1500 МПа$, $\rho_m = 1140 кг/м^3$, $E_f = 1140 МПа$, $\rho_f = 980 кг/м^3$. З таблиці видно, що при орієнтованому наповненні швидкості хвиль більш ніж в два рази більші від випадку неорієнтованого наповнення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Медведєв К.В., Шульга В.М., Корнієнко В.Ф., Ластівка І.О. Поширення акустичних хвиль кілогерцевого діапазону в фібрильних нитках // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – Вип. 80. – С. 82-88.
2. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т. Т.1. Механика материалов. – Киев: Наукова думка, 1982. – 368 с. Т.2. Механика элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1983. – 464 с.
3. Механика композитов. В 12-и т. Т.9. Динамика элементов конструкций. – Киев: “А.С.К.”, 1999. – 379 с.
4. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропоном полом цилиндре.–Прикл. механика.–1974. – 10, № 9. – С. 14-18.

5. Шульга Н.А. Об электроупругих волнах в сплошном пьезокерамическом цилиндре с продольной поляризацией // Прикл. механика. – 1986. – 22, № 11. – С. 17-21.
6. Шульга Н.А., Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Осе симметричные волны в сплошном ортотропном цилиндре // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 5, С. 41-44.

Получено 03.05.2008 г.