УДК 681.5

В.Л. Тимченко

ФОРМУВАННЯ КЕРУЮЧИХ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ СТРУКТУРНО-ЗМІННИХ ЗВОРОТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ В ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМАХ

Вступ та постановка задачі

Рішення задачі синтезу оптимальних керуючих впливів, які забезпечують перехідний процес керування об'єкту з заданими показниками якості керування, є актуальним при розробці ефективних прикладних методів синтезу. Класичні методи оптимального керування приводять до ряду розрахункових складностей, наприклад, необхідності рішення краєвих задач [1,2]. Аналітичне рішення краєвих задач, з урахуванням багато вимірності об'єкта керування, ускладнено та громіздко, а кількісні методи в ряді випадків не дають достатньо швидкої збіжності [2], керування в зворотних зв'язках вимагає повної інформації о похідних вихідних координат [3,4]. В статті розглядається застосування методу структурно-змінних зворотних зв'язків [5,6] до дискретних систем, який забезпечує керування за допомогою спеціальних структур зворотних зв'язків.

Вирішення задачі

Застосування методу структурно-змінних зворотних зв'язків для синтезу керуючих функцій при керуванні багатовимірним лінійним об'єктом включає наступні основні етапи:

- планування оптимальної фазової траєкторії;
- визначення моментів перемикання керуючих функцій в зворотних зв'язках об'єкту керування;
- синтез керуючих функцій в зворотних зв'язках багатовимірного об'єкту керування.

Синтез керуючих функцій полягає в визначенні керуючих впливів в зворотних зв'язках об'єкта керування, при яких на заданих відрізках фазової траєкторії виконуються умови незмінності відповідних різниць (похідних) k–го порядку фазової змінної $\mathbf{V}(k)$ чи нульових різниць (k+1) - го порядку. Таким чином, при русі по

 ISSN 1562-9945

координатним осям $l = \{x,\ y,\ z\}$ на кожному відрізку фазової траєкторії буде включатись на визначений час Δt^l відповідний зворотний зв’язок, що реалізує задану керуючу функцію. В роботі [6] показано для безперервних систем, що планування оптимальної траєкторії руху здійснюється на основі фазових траєкторій відповідного виду, які визначаються заданими критерієм оптимальності та граничними умовами. Моменти перемикання керуючих при цьому знаходяться шляхом рішення системи алгебраїчних рівнянь, які складаються з фазових траєкторій.

Фазову траєкторію руху лінійного об’єкту в різницевій формі (приймемо інтервал часу дискретності $\Delta t = 1$) для нульової різниці $(n+1)$ - го порядку можна представити в вигляді

$$\mathbf{V}[k] = \mathbf{V}[0] + \nabla\mathbf{V}[0]k + \nabla^2\mathbf{V}[0]\frac{k^2}{2!} + \ldots + \nabla^n\mathbf{V}[0]\frac{k^n}{n!}, \qquad (1)$$

де $k = 0,1,2,\ldots,m-$ порядок інтервалу дискретності;

$\nabla^i\mathbf{V}[0]$ - різниця i − го порядку($i = 1,2,\ldots,n$).

Наприклад, проаналізуємо вирішення класичної задачі оптимальної швидкодії для об’єкта виду

$$\nabla^2 x[k] = u[k]$$

для початкових $\nabla x[0]; x[0]$ і кінцевих $\nabla x[m]; x[m]$ умов, а також при обмеженні на керуючий вплив $|u[k]| \le 1$.

Фазові рівняння руху (1) при максимізації гамільтоніана [1] будуть включати два відрізка та мати вигляд для першого відрізку при $\nabla^2 x[0] = u[0] = const$ =-1

$$x[k] = x[0] + \nabla x[0]k - \nabla^2 x[0]\frac{k^2}{2!} = x[0] + \nabla x[0]k - \frac{k^2}{2!};$$

$$\nabla x[k] = \nabla x[0] - \nabla^2 x[0]k = \nabla x[0] - k;$$

та для другого − при $\nabla^2 x[k] = u[k] = const$ =+1

$$x[m] = x[k] + \nabla x[k](m-k) + \frac{(m-k)^2}{2!};$$

$$\nabla x[m] = \nabla x[k] + \nabla^2 x[0](m-k) = \nabla x[k] + (m-k).$$

При цьому інтервал дискретності k визначає момент перемикання керуючого впливу, а інтервал дискретності m - закінчення перехідного процесу. Рішення алгебраїчних рівнянь, що описують фазові траєкторії дозволяє визначити необхідні інтервали дискретності k та m.

Для загального виду дискретної системи керування запишемо векторно-матричне рівняння наступним чином

$$\mathbf{V}[k+1]-\mathbf{V}[k]=\mathbf{AV}[k]+\mathbf{BU}[k],$$

чи

$$\mathbf{V}[k+1]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{V}[k]+\mathbf{BU}[k], \tag{2}$$

де **E** - одинична матриця.

Граничні умови будуть мати вигляд $\mathbf{V}[0];\mathbf{V}[m]$.

Для другої різниці маємо з урахуванням **(2)**

$$\mathbf{V}[k+2]-2\mathbf{V}[k+1]+\mathbf{V}[k]=\mathbf{A}(\mathbf{V}[k+1]-\mathbf{V}[k])+\mathbf{B}(\mathbf{U}[k+1]-\mathbf{U}[k]);$$

$$\mathbf{V}[k+2]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^2\mathbf{V}[k]+(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{BU}[k]+\mathbf{BU}[k+1].$$

При керуванні з нульовим значенням першої та другої різниць запишемо

$$\mathbf{U}[k]=-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AV}[k];$$

$$\mathbf{U}[k+1]=-\mathbf{B}^{-1}\{\mathbf{A}(\mathbf{V}[k+1]-\mathbf{V}[k])\}+\mathbf{U}[k].$$

Підставляючи вираз **(2)** для $\mathbf{V}[k+1]$, знайдемо значення компонентів вектора керуючих функцій для кожного інтервалу дискретності при нульовій другій різниці вектору стану системи та відомих начальних значеннях $\mathbf{U}[0]$ та $\mathbf{V}[0]$

$$\mathbf{U}[1]=-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{V}[0]+(\mathbf{E}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB})\mathbf{U}[0];$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{U}[k+1]=-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{V}[k]+(\mathbf{E}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB})\mathbf{U}[k].$$

Для третьої різниці при начальних значеннях $\mathbf{U}[0],\mathbf{U}[1],\mathbf{V}[0]$ отримаємо для кожного інтервалу дискретності

$$\mathbf{U}[2]=-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^3\mathbf{V}[0])-\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^2\mathbf{B}-\mathbf{AB}+\mathbf{E})\mathbf{U}[0]-(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}-2\mathbf{E})\mathbf{U}[1];$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{U}[k+2]=-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^3\mathbf{V}[k]-\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^2\mathbf{B}-\mathbf{AB}+\mathbf{E})\mathbf{U}[k]-(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}-2\mathbf{E})\mathbf{U}[k+1].$$

Аналогічним чином можна знайти четверту та інші необхідні нульові різниці координати стану.

Для замкнутих систем при головному («жорсткому», одиночному) зворотному зв'язку запишемо

$$\mathbf{V}[k+1]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{V}[k]+\mathbf{B}(\mathbf{U}[k]-\mathbf{V}[k]),$$

чи в вигляді

 ISSN 1562-9945

$$\mathbf{V}[k+1] = (\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{E})\mathbf{V}[k] + \mathbf{B}\mathbf{U}[k] = \mathbf{A}^*\mathbf{V}[k] + \mathbf{B}\mathbf{U}[k], \qquad (3)$$

де $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{E}$.

Цей клас систем має аналогічний порядок синтезу рекурентних керуючих функцій.

Наприклад, для нульової другої різниці вектору стану системи (3) та відомих начальних значеннях $\mathbf{U}[0]$ та $\mathbf{V}[0]$ запишемо для вектору керуючих функцій

$$\mathbf{U}[1] = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})^2\mathbf{V}[0] + [\mathbf{E} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{B}]\mathbf{U}[0];$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{U}[k+1] = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})^2\mathbf{V}[k] + [\mathbf{E} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{B}]\mathbf{U}[k].$$

Розглянемо далі замкнуту стаціонарну систему, коли на вхід подається вектор спостерігаемих координат $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{V}[k+1] = (\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{V}[k] + \mathbf{B}(\mathbf{U}[k] - \mathbf{Y}[k]);$$

$$\mathbf{Y}[k] = \mathbf{A}\mathbf{V}[k] + \mathbf{B}\mathbf{U}[k].$$

Тоді будемо мати рекурентні рівняння для вектору стану в $k+1$ – інтервал дискретності для одиничного зворотного зв'язку

$$\mathbf{V}[k+1] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C} + \mathbf{E})\mathbf{V}[k] + (\mathbf{B} - \mathbf{D})\mathbf{U}[k] = \widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{V}[k] + \widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}[k],$$

де $\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C} + \mathbf{E}); \widetilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \mathbf{D})$.

Так же як в попередньому випадку, отримаємо вектор керуючих функцій для нульової другої різниці вектору стану системи та відомих начальних значеннях $\mathbf{U}[0]$ та $\mathbf{V}[0]$

$$\mathbf{U}[1] = -(\mathbf{B} - \mathbf{D})^{-1}[\mathbf{A} - (\mathbf{B} - \mathbf{D})\mathbf{C}]^2\mathbf{V}[0] +$$

$$\{\mathbf{E} - (\mathbf{B} - \mathbf{D})^{-1}[\mathbf{A} - (\mathbf{B} - \mathbf{D})\mathbf{C}](\mathbf{B} - \mathbf{D})\}\mathbf{U}[0];$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{U}[k+1] = -(\mathbf{B} - \mathbf{D})^{-1}[\mathbf{A} - (\mathbf{B} - \mathbf{D})\mathbf{C}]^2\mathbf{V}[k] +$$

$$\{\mathbf{E} - (\mathbf{B} - \mathbf{D})^{-1}[\mathbf{A} - (\mathbf{B} - \mathbf{D})\mathbf{C}](\mathbf{B} - \mathbf{D})\}\mathbf{U}[k].$$

Для нестаціонарної дискретної системи при постійних значеннях компонентів матриці $\mathbf{B}$ маємо

$$\mathbf{V}[k+1] = (\mathbf{A}[k] + \mathbf{E})\mathbf{V}[k] + \mathbf{B}\mathbf{U}[k].$$

При нульовій першій різниці запишемо для вектора керуючих функцій

$$\mathbf{U}[k] = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}[k]\mathbf{V}[k].$$

Для нульової другої різниці будемо мати при начальних умовах $\mathbf{U}[0], \mathbf{V}[0]$ та відомих значеннях $\mathbf{A}[0], \mathbf{A}[1], \ldots, \mathbf{A}[k+1]$

$$\mathbf{U}[1] = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^2[0] + \mathbf{A}[1] - \mathbf{A}[0])\mathbf{V}[0] + (\mathbf{A}[0]\mathbf{B} + \mathbf{E})\mathbf{U}[0];$$

....

$$\mathbf{U}[k+1] = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^2[k] + \mathbf{A}[k+1] - \mathbf{A}[k])\mathbf{V}[k] + (\mathbf{A}[k]\mathbf{B} + \mathbf{E})\mathbf{U}[k];$$

Подібні рекурентні співвідношення можна сформувати для нульових різниць вищого порядку та змінної матриці **B**.

Висновки

Запропонований метод структурно — змінних зворотних зв’язків дозволяє для багатовимірних дискретних об’єктів (чи динамічних об’єктів, які описуються різницевими рівняннями) вирішувати практичні задачі побудови оптимальних фазових траєкторій руху. При цьому рух об’єкту по відрізкам оптимальної траєкторії забезпечується керуючими функціями в зворотних зв’язках, які мають можливість перемикання для забезпечення переходу з начального відрізку плануємої траєкторії руху на наступний відрізок.

Також можна відмітити, що побудова оптимальної траєкторії та визначення моментів часу перемикання керуючих функцій здійснюється шляхом рішення системи алгебраїчних рівнянь; застосування керуючих функцій в зворотних зв’язках не потребує безпосереднього виміру відповідних різниць фазових координат на виході об’єкта керування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов — М.: Наука, 1974. — 392 с.
2. Беллман Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Беллман Р., Калаба Р. — М.:Мир, 1968. — 184 с.
3. Ларин В.Б. Стабилизация системы обратной связью по выходной переменной // Проблемы упр. и информ. - К., 2004. - № 2. - С.5 - 18.
4. Лобок О.П. Синтез оптимального керування технологічними процесами / Лобок О.П., Луцька Н.М // Автоматизація виробн. процесів. — К., 2003. — №1(16). — С. 81 — 84.
5. Kondratenko Y.P. Optimal feedback switching method for linear control systems / Kondratenko Y.P., Timchenko V.L. // Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications (Mathematical Research). — Berlin: Academia Verlag, 1994. Vol.79. — P.291 — 292.
6. Тимченко В.Л. Синтез управляющих функций методом структурно-переключаемых обратных связей//Труды Одесского национального политехнического университета№2(24),2005. – С.155-160.

Получено 14.03.2008 г.