УДК 536.24

В.О. Яковенко

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІДНОВЛЕННЯ СИПУЧОСТІ МЕТАЛУРГІЙНОЇ СИРОВИНИ ЕНЕРГІЄЮ МІКРОХВИЛЬОВОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Аналіз публікацій по темі дослідження

Забезпечення безперебійної подачі різних видів металургійної сировини є однією з найважливіших умов виконання графіка роботи металургійної промисловості. У зимових умовах відбувається змерзання сировини, що транспортується залізничними вагонами. Основною причиною змерзання є підвищена вологість, унаслідок чого утворюється тверда фаза у вигляді льоду [1].

Розморожування сировини у вагонах проводиться в гаражах-тепляках, де передача тепла здійснюється конвекцією при обтіканні стінок газом, а так само радіацією від смолоскипа і розпечених стінок [2].

Актуальним є відновлення сипучості металургійної сировини енергією мікрохвильового електромагнітного поля. Фізичні передумови мікрохвильового відновлення сипучості полягають в тому, що електромагнітна енергія по-різному поглинається різними речовинами [3].

Постановка задачі

Розглянемо нестаціонарний процес теплообміну при розігріві металургійної сировини в умовах фазового перетворення «тверда фаза – рідка фаза», що виникає під дією мікрохвильового нагріву. Такий процес будемо визначати системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка складається з рівнянь Максвела і рівнянь теплопровідності наступного виду:

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial \tau}, \quad rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}, \quad div\,\vec{D} = 0, \quad div\,\vec{B} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{D} = \varepsilon(t)\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(t)\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma(t)\vec{E}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(c_i \rho_i t_i)}{\partial \tau} + \vec{V}_i \vec{\nabla} t_i = div\left(\lambda_i \vec{\nabla} t_i\right) + q\left(t_i, \vec{E}\right), \tag{3}$$

де $\vec{E}, \vec{H}$ - вектори напруженості електричного та магнітного полів відповідно, $\vec{D}, \vec{B}$ - вектори електричної та магнітної індукції відповідно, $\vec{j}$ - щільність струму провідності, $\varepsilon_i = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon' - i\sigma/\omega, \mu$ - абсолютні діелектрична і магнітна проникності матеріалу відповідно, σ - провідність матеріалу, ω - кругова частота, c_i, ρ_i, λ_i - коефіцієнт теплоємності, щільність і коефіцієнт теплопровідності матеріалу, що залежать від температури i-ої фази, $\vec{V}_i$ - вектор швидкості переміщення i-го матеріалу, $\vec{\nabla}$ - оператор Гамільтона, $q = 0{,}5\omega\varepsilon' tg\delta \left|\vec{E}\right|^2$ - питома поглинена потужність, t_i - температура i-го матеріалу, $tg\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$ - тангенс кута діелектричних утрат матеріалу.

Наведена система рівнянь доповнюється початковими та граничними умовами, а також умовою на межі розділу «тверда фаза – рідка фаза».

Слід зазначити, що розв'язок наведеної системи рівнянь пов'язаний з труднощами не тільки обчислювального характеру, але й принциповими. Таке твердження ґрунтується на наступному: умови на межі розділу фаз є нелінійними, сформульована модель є багатомірною відносно просторових змінних, електрофізичні параметри матеріалів залежать від температури і є наближеними, алгоритми розв'язку таких задач вимагають обґрунтування та використання необхідних комп'ютерних технологій. Тому слід розглянути спрощену модель процесу, реалізацію якої можна провести методами комп'ютерного моделювання.

Розігрів сипучих вантажів, що містять вологу, мікрохвильовою енергією супроводжується складними процесами тепломасопереносу. Це фазові перетворення рідини, зміна льодистості, вологоперенос, взаємодія парової вологи з кістяком середовища. Крайова задача про нагрівання області кінцевих розмірів з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, що дозволяє визначити розподіл температур у рідкій і твердій фазах у залежності від частоти електромагнітного поля, а також закон руху фазового перетворення, може бути сформульована в такий спосіб:

- у рідкій фазі:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\alpha \vec{E}^2}{c\rho_1}, \tag{4}$$

$$T_1(0,z) = T_C, \ \left.\frac{\partial T_1}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0, \tag{5}$$

$$T_1(\tau,0) = T_C, \ T_1(\tau,\xi) = T_\Phi; \tag{6}$$

- у твердій фазі:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a_2^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, \tag{7}$$

$$T_2(0,z) = T_0, \ \left.\frac{\partial T_2}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0, \tag{8}$$

$$T_2(\tau,1) = T_0, \ T_2(\tau,\xi) = T_\Phi. \tag{9}$$

Умова Стефана на ізотермічній границі розподілу фаз має вигляд [4]:

$$q_1[\tau,\xi(\tau)] - q_2[\tau,\xi(\tau)] = L\rho_1 \frac{d\xi}{d\tau}. \tag{10}$$

Зв'язок між температурним і електромагнітним полем при нестаціонарному процесі взаємодії електромагнітної хвилі з матеріалом, можна визначити, використовуючи рівняння [5]:

$$\frac{d\overline{T}}{d\tau} = \Omega_2 f \vec{E}^2. \tag{11}$$

Вектор теплового потоку можна представити у вигляді [4]:

$$\vec{q} = -\frac{\lambda}{\tau_1}\int_0^\tau \nabla T \, exp\left[-\frac{(\tau-\eta)}{\tau_1}\right] d\eta, \tag{12}$$

де τ_1 – час температурної релаксації.

Розв’язок задачі

Рівняння (10) з урахуванням залежності (12) можна представити у вигляді:

$$\lambda_2 \left.\frac{\partial T_2}{\partial z}\right|_{z=\xi(\tau)} - \lambda_1 \left.\frac{\partial T_1}{\partial z}\right|_{z=\xi(\tau)} = L\rho\left(u\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau}\right), \tag{13}$$

де $\xi(0) = \xi_0, \ (d\xi / d\tau)_{\tau=0} = 0.$

Дотримуючись методу, який викладено в [6], уведемо нові функції:

$$\vartheta_1(z,\tau) = T_1(z,\tau) - T_c - (T_\Phi - T_c)\frac{z}{\xi(\tau)}, \tag{14}$$

$$\vartheta_2(z,\tau) = T_2(z,\tau) - T_\Phi - (T_0 - T_\Phi)\frac{z-\xi(\tau)}{l-\xi(\tau)}, \tag{15}$$

для яких граничні умови перетворяться до однорідних.

Для функцій розподілу температур у твердій фазі, утвореного розплавлення льоду і рухливої границі відповідно: $\vartheta_1(z,\tau)$, $\vartheta_2(z,\tau)$, $\xi(\tau)$, отримані наступні співвідношення:

$$T_1(z,\tau)=T_c+(T_\Phi-T_c)\frac{z}{\xi(\tau)}+\frac{2}{\xi(\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{\xi}z\ , \tag{16}$$

$$T_2(z,\tau)=T_\Phi+(T_0-T_\Phi)\frac{z-\xi(\tau)}{l-\xi(\tau)}+\frac{2}{l-\xi(\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\tau)\sin\frac{nz[z-\xi(\tau)]}{l-\xi(\tau)}\ , \tag{17}$$

де

$$\vartheta_1(z,\tau)=\frac{2}{\xi(\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{\xi}z\ , \tag{18}$$

$$\vartheta_2(z,\tau)=\frac{2}{l-\xi(\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\tau)\sin\frac{n\pi[z-\xi(\tau)]}{l-\xi(\tau)}, \tag{19}$$

де $\alpha_n(\tau)$ та $\beta_n(\tau)$ **- визначаються із системи звичайних диференціальних рівнянь:**

$$\tau_1\frac{d^2\alpha_n}{d\tau^2}+\frac{d\alpha_n}{d\tau}+\left(\frac{n\pi a_1}{\xi}\right)^2\alpha_n=\frac{\dot\xi}{2\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{nm}\alpha_m+\frac{\tau_1\dot\xi^2}{\xi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{nm}\alpha_m+$$
$$+\frac{\tau_1\dot\xi}{\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{nm}\frac{d\alpha_m}{d\tau}+\frac{\tau_1\xi}{2}\left(\frac{\ddot\xi}{\xi^2}-\frac{2\dot\xi^2}{\xi^3}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{nm}\alpha_m+\frac{2\tau_1\dot\xi^2}{\xi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\Delta_{nm}\alpha_m+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}(T_\phi-T_c)}{n\pi}\left[\dot\xi+\frac{\tau_1(\ddot\xi-2\dot\xi^2)}{\xi}\right]+\int_0^{\xi}\frac{\alpha\vec E^2}{c\rho_1}\sin\frac{n\pi}{\xi}zdz; \tag{20}$$

$$\alpha_n(0)=\frac{(-1)^{n+1}(T_c-T_\phi)}{n\pi}\xi_0,\quad \left.\frac{d\alpha_n}{d\tau}\right|_{\tau=0}=0 \tag{21}$$

$$\gamma_{nm}=1,\ \Delta_{nm}=\frac{2m\pi^2-3}{12},\ m=n \tag{22}$$

$$\gamma_{nm}=\frac{4(-1)^{n+m}mn}{m^2-n^2},\ \Delta_{mn}=\frac{4(-1)^{m+n}mn^3}{(m^2-n^2)^2},\ m\neq n \tag{23}$$

$$\tau_1\frac{d^2\beta_n}{d\tau^2}+\frac{d\beta_n}{d\tau}+\left(\frac{n\pi a_2}{l-\xi}\right)^2\beta_n=\frac{\dot\xi}{2(l-\xi)}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_{nm}\beta_m+$$
$$+\frac{\dot\xi(l-\dot\xi)}{(l-\xi)^2}\tau_2\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{nm}\beta_m+\frac{\tau_1\dot\xi}{l-\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{nm}\frac{d\beta_m}{d\tau}+\frac{\tau_2\left[2\dot\xi^2+\xi(l-\xi)\right]}{(l-\xi)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_{nm}\beta_m+$$
$$+\frac{\tau_1\ddot\xi^2}{(l-\xi)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{nm}\beta_m+\frac{T_0-T_\phi}{n\pi}\left[\dot\xi+\frac{\tau_2\left(\ddot\xi(l-\xi)+2\dot\xi^2\right)}{l-\xi}\right]; \tag{24}$$

$$\beta_n(0)=\frac{(T_0-T_\phi)(l-\xi_0)}{n\pi};\left.\frac{d\beta_n}{d\tau}\right|_{\tau=0}=0 \quad (25)$$

 ISSN 1562-9945

$$\Omega_{nm} = -1,\ \delta_{nm} = \Omega_{nm},\ \omega_{nm} = -\frac{1}{6}\left(8\pi^2 m^2 - 3\right),\ n = m \qquad (26)$$

$$\Omega_{nm} = -\frac{4nm}{m^2 - n^2},\ \delta_{nm} = 2\Omega_{nm},\ \omega_{nm} = -\frac{8mn^3}{\left(m^2 - n^2\right)^2},\ n \neq m. \qquad (27)$$

Тоді співвідношення на границі розподілу фаз з урахуванням залежностей для $T_1(z,\tau)$ і $T_2(z,\tau)$, а так само рівняння (11) приймає вид [7]:

$$u\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{1}{L\rho}\left[\frac{\lambda_2(T_\Phi - T_O)}{l - \xi} + \frac{\lambda_1(T_\Phi - T_C)}{\xi}\right] +$$

$$+\frac{2\lambda_1\pi}{\xi^2}\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n\alpha_n - \frac{2\lambda_2\pi}{(l-\xi)^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n = 0;$$

$$\xi(0) = \xi_0,\ \ \dot{\xi}(0) = 0. \qquad (28)$$

Якщо закон руху границі розподілу фаз задається на основі тих або інших фізичних розумінь, то системи диференціальних рівнянь будуть лінійними. Слід зазаначити, що при $\tau_1 \to 0$ отримані результати прагнуть до відповідних результатів задачі Стефана, що ґрунтується на теорії Фур'є.

Нагадаємо, що в дійсності мікрохвильова енергія в матеріалі загасає. Це приводить до виникнення розподілених джерел тепла, щільність яких є експериментально заданою функцією S координат і часу [5]. Для цього випадку мікрохвильового нагрівання рівняння (4) прийме вид:

$$\tau_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial\tau^2} + \frac{\partial T_1}{\partial\tau} = a_1^2\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{S}{c\rho_1}, \qquad (29)$$

а умова зв'язку температурного і мікрохвильового електромагнітного поля прийме вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial\tau} = \Omega_2 f \vec{E}^2, \qquad (30)$$

яке дає можливість визначити шукану робочу частоту, що відповідає заданій функції S:

$$-\frac{\left(T_\Phi - T_C\right)\dot{\xi}}{\xi^2} - \frac{2\dot{\xi}}{\xi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{\xi}z +$$

$$+\frac{2}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d\alpha_n}{d\tau}\sin\frac{n\pi}{\xi}z - \frac{2\pi\dot{\xi}}{\xi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n nz\cos\frac{n\pi}{\xi}z = \Omega_2\vec{E}^2 f. \qquad (31)$$

Висновок

В роботі запропонована математична модель відновлення сипучості металургійної сировини енергією мікрохвильового електромагнітного поля з урахуванням фазових перетворень. Отримані співвідношення для розподілу температур у твердій і рідкій фазах, закон руху межі фазового перетворення, а також співвідношення для визначення робочої частоти мікрохвильового електромагнітного поля.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кожевников Н.Н., Попов В.И. Прогнозирование процессов промерзания в сыпучих материалах при железнодорожных перевозках. – Новосибирск: Наука, 1978. – 104 с.
2. Приходько А.А., Голуб В.Г., Бойко В.Н., Вильтовский А.В. Математическое моделирование и экспериментальное исследование размораживания пористых сред // Тепломассоообмен - ММФ-96. Тепломассообмен в капилярно-пористых телах. – Минск: АНК „ИТМО им. А.В. Лыкова" АНБ, 1996. – Т. VII. – С. 50 – 54.
3. Линник Ю.М. Основы разупрочнения мерзлых пород СВЧ - полями. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. – 212 с.
4. Лыков А.В. Теплообмен. – М.: Энергия, 1971. – 560 с.
5. Пюшнер Г. Нагрев энергией сверхвысоких частот. Пер. с англ.– М.: Энергия, 1968. – 175 с.
6. Яковенко В.О. Моделювання теплообміну при збудженні в матеріалі надвисокочастотного поля. Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла // Збірник наукових праць Дніпропетровського національного університету. – Дніпропетровськ, 2006. – Вип. 7. – С. 163 – 168.
7. Яковенко В.О. Моделювання надвисокочастотного нагрівання матеріала в умовах перевидбиття плоскої електромагнітної хвилі // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КДПУ, 2007. – Вип. 5/2007 (46), частина 1. – С. 55 – 57.

Получено 04.03.2008 г.