УДК 519.65

Р.Н. Квєтний, М.О. Машницький

МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ОБ’ЄКТІВ В ПРОСТОРІ

Актуальність. Постановка задачі

Моделювання одновимірних об’єктів в просторі є досить актуальною задачею. В останні роки важко не помітити стрімкий розвиток електроніки та техніки, тому саме в наш час виникає проблема моделювання та дослідження об’єктів за допомогою обчислювальної техніки. При дослідженні об’єкта, який залежить від координат простору, постає задача ідентифікації їх математичних моделей. Для вирішення цієї проблеми потрібно застосовувати саме математичне моделювання, яке об’єднує експеримент та теорію і використовується в таких галузях як медицина, космічні дослідження, геофізика тощо. Це значно розширює області впровадження результатів досліджень, крім традиційної комп’ютерної графіки.

Одним з найпоширеніших методів моделювання об’єктів є інтерполяційний метод. На сучасному етапі розвитку науки існують інтерполяційні методи лише для моделювання трьохвимірних об’єктів простору[1]. В статті пропонується модифікація інтерполяційних методів моделювання одновимірних об’єктів в просторі.

Під одновимірним об’єктом, ми розуміємо об’єкт, що описується функцією, яка залежить від одного параметру. Прикладом одновимірного об’єкту простору є крива одиничної товщини. Одним із способів представлення є векторно-параметричний спосіб, який має наступний вигляд:

$$r = r(t) = \begin{Vmatrix} x1(t) \\ x2(t) \\ x3(t) \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

Вибір точки об’єкту має одну ступінь свободи – він визначається вибором значення одного параметра *t*, який проходить деякий інтервал, наприклад, одиничний інтервал на раціональній числовій вісі. Точки об'єкту задаються їх радіус-векторами $r = r(t)$, компоненти яких $x1(t)$, $x2(t)$ і $x3(t)$ є функціями параметра t.

Задача моделювання одновимірних об'єктів в просторі є схожою до задачі інтерполяції функції однієї змінної, де функцією є залежність компонента радіус-вектора від параметру t. Дана задача полягає в тому, щоб по заданим значенням компонентів вектора в скінченій їх кількості відновити аналітичний вигляд функції для цих компонентів або знайти їх значення, які не задані. В загальному випадку інтерполяція функції зводиться до знаходження її не табличних значень [2-5].

Задачі моделювання одновимірних об'єктів необхідно розв'язувати, коли отримують зображення, в задачах різного типу діагностувань, топографії та багатьох інших галузях. На даний момент в цій галузі проводиться активна дослідницька робота провідних компаній з виробництва графічних прискорювачів та компаній з виготовлення програмного забезпечення для тривимірного моделювання та спеціальних ефектів.

Метою статті є розширення функціональних можливостей інтерполяційних методів моделювання одновимірних об'єктів простору, які задані в параметричному вигляді.

Опис методу

Нехай для одновимірного об'єкту, який описує модель $\varphi(t) = \begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Vmatrix}$, задані значення $\varphi_i = \begin{Vmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Vmatrix}$ для рівновіддалених значень параметру $t_i = t_0 + ih$, де ($i = \overline{1..n}$), де h - крок інтерполювання.

При використанні поліноміальних методів згідно з постановкою інтерполяції формули Ньютона необхідно підібрати поліноми $P(t_i) = \begin{Vmatrix} P_x(t_i) \\ P_y(t_i) \\ P_z(t_i) \end{Vmatrix}$ ступеня не вище $(n-1)^2$, який для кожного значення параметру t_i приймає конкретні значення (x_i, y_i, z_i).

Якщо використати першу інтерполяційну формулу Ньютона для інтерполяції першого компонента вектора, то вона буде мати вигляд:

 ISSN 1562-9945

$$P_x(t) = x_0 + q\Delta x_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 x_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n x_0 \qquad (2)$$

де $q = \dfrac{t - t_0}{h}$.

Введемо означення узагальненого степеня. Узагальненим степенем числа q будемо називати добуток n множників, перший з яких дорівнює q, а кожний з наступних на 1 менше попереднього:

$$q^{[n]} = q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1). \qquad (3)$$

Якщо використати формули (3), (2) і зробити деякі математичні перетворення, формула (2) буде мати вигляд:

$$P_x(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i x_0 . \qquad (4)$$

Аналогічно отримуємо інтерполяційні формули Ньютона для інтерполяції другого та третього компоненту:

$$P_y(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i y_0 , \qquad (5)$$

$$P_z(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i z_0 . \qquad (6)$$

Отже, перша інтерполяційна формула Ньютона для одновимірного об’єкту простору має вигляд:

$$P_r(t) = \left\| \begin{matrix} \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i x_0 \\ \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i y_0 \\ \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i z_0 \end{matrix} \right\| . \qquad (7)$$

Аналогічно отримуються інтерполяційні формули для різних типів різниць.

Таблиця 1

Інтерполяційні формули для моделювання одновимірних об'єктів в просторі

Назва методу	Формула	Узагальнений степінь
Перша інтерполяцій на формула Ньютона	$P_r(t)=\begin{Vmatrix}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i x_0\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i y_0\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i z_0\end{Vmatrix}$	$q^{[n]}=q(q-1)(q-2)\ \ldots\ (q-n+1)$ де, $q=\frac{t-t_0}{h}$
Друга інтерполяцій на формула Ньютона	$P_r(t)=\begin{Vmatrix}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i x_{n-i}\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i y_{n-i}\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{q^{[i]}}{i!}\Delta^i z_{n-i}\end{Vmatrix}$	$q^{[n]}=q(q+1)(q+2)\ \ldots\ (q+n-1)$ де, $q=\frac{y-y_n}{h_y}$.
Перша інтерполяцій на формула Гауса	$P_r(t)=\begin{Vmatrix}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{(q+s)^{[i]}}{i!}\Delta^i x_m\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{(q+s)^{[i]}}{i!}\Delta^i y_m\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{(q+s)^{[i]}}{i!}\Delta^i z_m\end{Vmatrix}$ де, $s=\lceil i/2\rceil-1$, $m=-\lfloor i/2\rfloor$.	$(q+m)^{[n]}=(q+m)\times$ $\times(q+m-1)\ldots(q+m-n+1)$
Друга інтерполяцій на формула Гауса	$P_r(t)=\begin{Vmatrix}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{(q+s)^{[i]}}{i!}\Delta^i x_m\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{(q+s)^{[i]}}{i!}\Delta^i y_m\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{(q+s)^{[i]}}{i!}\Delta^i z_m\end{Vmatrix}$ де, $s=\lfloor i/2\rfloor$, $m=-\lceil i/2\rceil$.	$(q+m)^{[n]}=(q+m)\times$ $\times(q+m-1)\ \ldots\ (q+m-n+1)$
Інтерполяцій на формула Стірлінга	$P_r(t)=\begin{Vmatrix}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{q^{[i]}}{i!}\frac{\Delta^i x_m+\Delta^i x_s}{2}\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{q^{[i]}}{i!}\frac{\Delta^i y_m+\Delta^i y_s}{2}\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{q^{[i]}}{i!}\frac{\Delta^i z_m+\Delta^i z_s}{2}\end{Vmatrix}$	$q^{[n]}=q^c(q^2-1^2)\ldots(q^2-(w-1)^2)$ де, $c=\begin{cases}1\ якщо\, n=1,3,5,\ldots\\ 2\ якщо\, n=2,4,6,\ldots\end{cases}$, $w=\lceil n/2\rceil$.

	де, $m=-\lceil i/2 \rceil$, $s=-\lfloor i/2 \rfloor$.	
Інтерполяцій на формула Беселя	$P_r(t)=\begin{Vmatrix} \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!} \frac{\Delta^i x_m + \Delta^i x_{m+1}}{2} \\ \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!} \frac{\Delta^i y_m + \Delta^i y_{m+1}}{2} \\ \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!} \frac{\Delta^i z_m + \Delta^i z_{m+1}}{2} \end{Vmatrix}$ де, $m=-\lceil i/2 \rceil$.	$q^{[n]}=\left(q-\frac{1}{2}\right)^c q(q-1)(q+1)\times$ $\times(q-2)(q+2)...(q+(w-1))$ де, $c=\begin{cases} 1 \text{ якщо } n=1,3,5,... \\ 2 \text{ якщо } n=2,4,6,... \end{cases}$, $w=\lceil n/2 \rceil$.

Модифікація інтерполяційної формули для інтерполяції кривої простору

Якщо в якості параметра використати одну із компонент для прикладу *x*, то інтерполяційна формула для інтерполяції кривої простору для загального випадку буде мати вигляд:

$$P_r(t)=\begin{Vmatrix} x \\ P_y(x) \\ P_z(x) \end{Vmatrix}. \quad (8)$$

Аналогічно попередньому випадку отримаємо першу інтерполяційну формулу Ньютона для інтерполяції кривої простору:

$$P_r(t)=\begin{Vmatrix} x \\ \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!} \Delta^i y_0 \\ \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{[i]}}{i!} \Delta^i z_0 \end{Vmatrix}, \quad (9)$$

де $q=\frac{x-x_0}{h}$.

Висновки

В даній статті запропоновано підхід до моделювання одновимірних об'єктів в просторі, який, на відміну від класичних, дозволяє моделювати одновимірні об'єкти, котрі задані параметрично. Описаний підхід дав можливість зменшити кількість обчислень, що потрібні для моделювання таких об'єктів.

Розглянута математична модель є досить проста та ефективна і може бути використана на практиці при тривимірному моделюванні, в фізиці, астрономії, космонавтиці, медицини, металургії, та ін.

ЛІТЕРАТУРА

1. Машницький М.О., Квєтний Р. Н. Моделювання трьохвимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Ньютона // Радіоелектронні і комп’ютерні системи 2007. - 2007. - №6(25). – С. 225-229.
2. Половко А.М., Бутусов П.Н. – Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.
3. Квєтний Р.Н. Методи комп’ютерних обчислень. – Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 148 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.1
5. Бахвалов Н.С. Численные методы, 2 изд. - М.:Наука, 1987. - 598 с.

Получено 11.03.2008 г.