УДК 518.81

О.А. Писклакова, Н.А. Брынза, Д.И. Филипская

АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Введение

Процедуру принятия решений, не зависимо от объектной ориентации, можно с формальных позиций структурировать на следующие этапы [1]: формирование и анализ цели; определение множества допустимых решений X; обоснование критерия эффективности $K(x)$, т.е. метрики в которой измеряется качество решений $x \in X$; выбор наилучшего (оптимального) решения $x^{\circ} \in X$. Третий из перечисленных этапов называется оцениванием, а четвертый – оптимизацией. Задача оптимизации может быть решена двумя способами: путем перебора решений, т.е. вычислением значений критерия эффективности $K(x)$ для всех $x \in X$, установлением на этой основе на множестве допустимых решений X отношения порядка

$$x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_n \qquad (1)$$

и выбором крайнего (экстремального) решения; непосредственным определением единственного экстремального решения

$$x^{\circ} = \arg \underset{x \in X}{extr} K(x). \qquad (2)$$

И в первом, и во втором случаях решение задачи оптимизации не вызывает принципиальных затруднений если выполняется два условия:критерий оценки эффективности решений является скалярной величиной; все исходные данные детерминированы, т.е. являются точечными численными значениями. Однако при решении большинства прикладных задач перечисленные условия не выполняются. При этом возникает необходимость решения более общей задачи многокритериальной оптимизации (МКО) в условиях неопределенности. Целью настоящей статьи является выявление источников неопределенности, определении их типологии и

ISSN 1562-9945

рассмотрение возможных подходов к вычислению значения оптимизационного функционала при решении задач МКО.

Источники и типы неопределенности при решении задачи МКО

Обобщенная процедура принятия решения может рассматриваться как синтез абстрактной системы, обеспечивающей достижение заданной цели. При такой постановке возникает необходимость формального определения абстрактной системы. В зависимости от целей анализа и уровня абстрагирования известны различные определения системы. Самым общим из них является теоретико-множественное описание. В этом случае под системой понимается множество M однородных или разнородных элементов, на котором реализовано множество отношений (связей) R, упорядочивающих элементы в структуру, обладающую множеством свойств Р, позволяющих достичь заданную цель. Таким образом, упорядочение множества элементов и отношений между ними образуют некоторую структуру вида

$$C = (M \times R), \tag{3}$$

которая может быть интерпретирована как нецеленаправленная система. Это связано с тем, что каждая структура обладает некоторыми свойствами, в том числе системными, т.е. такими, которые не вытекают прямо из свойств составляющих ее элементов, а являются результатом упорядочения, взаимодействия элементов на базе реализованных отношений.

Функциональное совершенство целенаправленных систем определяется степенью достижения цели, а так как это, в свою очередь, зависит от свойств системы, то каждое из них или их группы выступают в качестве частных критериев. Их совокупность $K_Ф(x)$ характеризует функциональное совершенство (эффект) каждого из возможных вариантов структуры. Также следует помнить, что синтез любого варианта структуры связан с упорядочением некоторого множества элементов путем реализации отношений между ними. Конкретные элементы этих двух множеств определяют затраты на создание системы $K_З(x)$. При интегральной оценке эффективности варианта системы учитываются обе группы частных критериев, т.е.

$$K(x) = K_ф(x) \cup K_з(x) = < k_j(x) >, \quad j = \overline{1,m}. \tag{4}$$

По определению предполагается, что задано отображение

 ISSN 1562-9945

$$f_j : x \to K, \tag{5}$$

т.е. функциональные зависимости (имитационные модели)

$$k_j(x) = f_j(x). \tag{6}$$

Проблема принятия решений в условиях неопределенности занимает в настоящее время особое место в информационных технологиях. Такие задачи возникают при анализе экономических, социальных, технических систем. Для этих задач характерно задание исходных условий, ограничений, структуры и параметров целевых функций неточно (неоднозначно), что, в свою очередь, приводит к неопределенности информации, и сильно затрудняет процесс принятия решений.

В теории оптимизации хорошо разработаны и продолжают интенсивно развиваться методы принятия решений при известных и фиксированных параметрах, т.е. в детерминированных условиях. Определенные успехи имеются и в том случае, когда параметры - случайные величины с известными законами распределения. Эти методы известны как методы принятия решений в условиях риска.

Однако основные трудности возникают тогда, когда исходные данные оказываются неопределенными (хотя, может быть, и не случайными) и они в то же время сильно влияют на результаты решения.

По степени неопределенности можно выделить следующие ситуации [2]: полная определенность – детерминированность; статистическая (вероятностная) неопределенность; лингвистическая неопределенность; интервальная неопределенность.

Все имитационные модели (6) принципиально неточны за счет действия НЕ-факторов [3, 4]: НЕточных измерений исходных данных, используемых при идентификации моделей, НЕполноты значений о функциональных зависимостях, сознательного упрощения моделей за счет НЕ учета некоторых переменных. Это означает, что значения частных критериев $k_j(x)$ вычисляются с большей или меньшей неопределенностью.

Еще одним источником неопределенности при решении задачи МКО является множество допустимых решений X. Отображение множества свойств, которыми должна обладать целенаправленная система на универсум структур позволяет выделить подмножество структур, на которых в принципе реализуемы требуемые свойства.

Элементы подмножества будем называть возможными решениями, а их совокупность – множеством в возможных решений X^B. Не все решения $x \in X^B$ являются допустимыми по экономическим, ресурсным, технологическим, экологическим, социальным соображениям. Источниками этих ограничений являются как эндогенные, внутрисистемные причины, так экзогенные внешние требования, порождаемые метасистемой, т.е. внешней, по отношению к рассматриваемой системе, средой. Эти требования, особенно, внешние, не полностью определены, т.е. содержат НЕ-факторы. Это приводит к тому, что система ограничений, определяющих допустимое множество решений $X \subset X^B$, в общем случае неполная, а описывающие ее уравнения НЕточные. Это очень важное обстоятельство, так как оптимальное решение принадлежит границе допустимой области и если эти границы заданы НЕточно, то экстремальное решение x° может оказаться не только НЕ оптимальным, но и недопустимым.

Третьим источником неопределенности при решении задач МКО является неопределенность, возникающая при их регуляризации. Как известно [1], допустимое множество решений содержит в общем случае подмножества согласованных X^S и противоречивых (компромиссных) X^C решений. Особенностью последних является невозможность улучшить ни один частный критерий $k_j(x)$, $j = \overline{1,m}$ без ухудшения качества хотя бы одного частного критерия. Это означает, что задача МКО

$$x^\circ = \arg \underset{x \in}{extr} < k_j(x) > ; \ \forall j = \overline{1,m}, \tag{7}$$

не имеет решения, т.е. является НЕ корректной по Адамару [5]. Регуляризация (7) с целью получения единственного решения основана на скаляризации кортежа частных критериев $k_j(x)$, $j = \overline{1,m}$. Наиболее перспективным способом решения этой задачи является формирование обобщенной скалярной оценки (функции полезности $P(x)$) [6]:

$$\overline{K}(x) \equiv P(x) = F[\lambda, K_j(x)]; \ j = \overline{1,m}, \tag{8}$$

где λ – коэффициенты изоморфизма, приводящие разнородные частные критерии $K_j(x)$ к изоморфному виду.

 ISSN 1562-9945

Реализация такого подхода связана с необходимостью решения задачи структурно-параметрической идентификации модели (8). Трудность решения этой задачи заключается в том, что процесс многофакторного оценивания является интеллектуальным, реализуемым лицом, принимающим решения (ЛПР) или экспертами, и они являются носителями знаний, необходимых для идентификации (8). Для получения знаний от их носителей может быть использованы методологии экспертного оценивания [7] или компараторной идентификации [8]. Как показано в [9] в обоих случаях можно получить только интервальные значения параметров модели (8), что приводит к интервальной неопределенности функции полезности $P(x)$.

Таким образом, постановка задачи МКО с учетом перечисленных неопределенностей принимает вид

$$x^{\circ} = \arg \underset{x \in X}{\underline{extr}} P[\overline{A}, \overline{k}_j^H(x)]; \quad (9)$$

где «–» обозначены переменные, которые содержат неопределенность;

$\overline{A}$ - кортеж безразмерных весовых коэффициентов $< a_j >$, $j = \overline{1,m}$, учитывающий относительную важность частных критериев;

$\overline{k}_j^H(x)$ - нормализованные, т.е. приведенные к безразмерному виду и единой шкале измерения [8], частные критерии.

Недостаточно точное знание параметров и переменных модели (9) требует, чтобы для конструктивного анализа они были представлены в некотором формализованном виде. Наиболее адекватным является представление в виде некоторых связных областей на шкалах, характеризующих возможные допустимые в конкретном случае значения каждого параметра [9].

Это означает, что исходные данные представляются в виде интервалов, задаваемых левыми $Д_Л$ и правыми $Д_П$ границами, при этом результаты моделирования также будут интервальными числами, т.е. содержать интервальную неопределенность.

Если границы интервала совпадают или величина интервала по функциональным соображениям можно считать пренебрежимо малой, данные являются точечными детерминированными значениями.

Для числовых исходных данных интервальное задание отвечает ситуации с наибольшей неопределенностью. Диапазон допустимых решений выходных переменных модели, вычисленных по правилам интервальной математики [10] оказывается часто чрезвычайно широким. Этот недостаток частично устраняется, а возможность количественного анализа значительно расширяется, если имеется априорная объективная или эвристическая информация о распределении возможных значений внутри интервала. Самой информативной является ситуация, когда имеется достаточно мощная статистика, позволяющая определить вероятностные характеристики, в частности, функцию плотности распределения и ее параметры – математическое ожидание, дисперсию и т.д.

Во многих случаях необходимая статистика отсутствует, но, эксперт на основе своего опыта, т.е. знаний полученных в прошлом на основе анализа подобных ситуаций, может выдвинуть гипотезу о законе распределения вероятностей и его параметрах. В дальнейшем такую информацию будем называть субъективной вероятностью.

Еще одной формой представления информации о возможном распределении значений внутри интервала являются нечеткие множества. Теория нечетких множеств предложена Л.Заде [11] для формализации нечетких лингвистических высказываний типа «приблизительно равно…», «около», «лежит в интервале от … до…».

В отличие от характеристической функции классического множества, которая может принимать только два значения 0 и 1, ее аналог – функция принадлежности нечеткому множеству $\mu(y)$ может принимать любые значения в интервале [0, 1]. Тогда, если Y – носитель нечеткого множества, т.е. интервал возможных значений, любое значение $y \in Y$, характеризуется парой $< y, \mu(y) >$, где $\mu(y)$ – численная характеристика истинности высказывания, что y принадлежит Y. Формирование функции принадлежности является эвристической, субъективной процедурой и поэтому этот вид неопределённости полностью субъективный.

В общем случае, постановка задачи МКО содержит как детерминированные, так и интервальные данные с неопределенностью всех трех видов. В этих условиях необходимо определить наилучшее решение задачи (8).

 ISSN 1562-9945

Как уже отмечалось, существует два подхода к решению к решению задачи оптимизации. Первый, основанный на переборе решений, заключается в том, что для всех решений $x \in X$ вычисляется значение оценки эффективности $P(x)$ и на этой основе решения ранжируются с целью определения экстремального. Второй подход ориентирован на непосредственное определение экстремального решения. В основе реализации обоих подходов лежит процедура вычисления по заданной модели численного значения многофакторной оценки $P(x)$ на множестве допустимых решений $x \in X$. Эта процедура тривиальна только в случае задания всех исходных данных в виде точечных детерминированных значений. В условиях неопределенности возникает специфическое затруднение. Одно из них связано с тем, что каждого вида неопределенности определены правила выполнения арифметических операций [10, 11, 12], но отсутствуют как правила выполнения арифметических операций на разнородных неопределенностях, так и методы взаимной трансформации одних видов неопределенности в другие. Вместе с этим, для всех видов неопределенности имеется общая характеристика – интервал возможных значений. В этих условиях взаимная трансформация связана или с эвристическим дополнением недостающей информации, например, эвристическим заданием функции плотности распределения вероятности, или пренебрежением известной информации, например, рассмотрение всех неопределенностей как интервальных без априорной информации о распределении значений внутри интервала. Корректность такой трансформации и оценка величины возникающих при этом погрешностей требует исследования и анализа. Ниже рассмотрен один частный случай трансформации интервальной неопределенности в вероятностную неопределенность с равномерным законом распределения.

Вычислительный эксперимент

Целью вычислительного эксперимента является оценка адекватности и точности эвристической трансформации интервальной неопределенности в субъективную вероятностную неопределенность в виде случайных величин с равномерным законом распределения.

В качестве тестовой принята простейшая аддитивная функция полезности вида

$$P(x)=\sum_{j=1}^{3}\overline{a}_j\overline{k}(x), \tag{10}$$

где $\overline{a}_j$, $\overline{k}_j(x)$ – соответственно интервально заданные весовые коэффициенты и нормализованные значения частных критериев.

В качестве исходных данных приняты следующие интервальные значения: $\overline{k_1}=[0.7,0.8]$, $\overline{k_2}=[0.35,0.5]$, $\overline{k_3}=[0.3,0.4]$; $\overline{a_1}=[0.4,0.6]$, $\overline{a_2}=[0.15,0.45]$, $\overline{a_3}=[0.1,0.3]$. Все интервальные величины являются независимыми.

Интервальные значения функции (10) вычислялись аналитически по правилам выполнения бинарных арифметических операций с интервальными значениями, которые имеют вид[10]:

$$\begin{cases} A+B=[a_1+b_1,a_2+b_2] \\ A-B=[a_1+b_2,a_2+b_1]=A+[-1,-1]\cdot B, \\ A\cdot B=[\min\{a_1b_1\},\{a_1b_2\},\{a_2b_1\},\{a_2b_2\}, \\ \max\{a_1b_1\},\{a_1b_2\},\{a_2b_1\},\{a_2b_2\}] \\ A:B=[a_1a_2]\cdot[1/b_1,1/b_2]. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь a, b – соответственно левая и правая границы интервалов.

Вероятностные значения функции (10) вычислялись двумя способами:

аналитически;

методом статистического моделирования Монте-Карло, реализованного в среде MATLAB R2006a.

Аналитические вычисления проводились по формулам сложения и умножения независимых случайных величин. В связи с этим для интервальных величин определялись статистические параметры, в предположении, что они распределены по закону равной вероятности[12]:

математическое ожидание

$$M=\frac{(a+b)}{2}; \tag{12}$$

дисперсия

$$D=\frac{(b-a)}{12}; \tag{13}$$

а затем по формулам [12]

 ISSN 1562-9945

$$M(x_1 + x_2 + ... + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + ... + M(x_n); \qquad (14)$$

$$D(x_1 + x_2) = D(x_1) + D(x_2); \qquad (15)$$

$$M[XY] = M[X]M[y]; \qquad (16)$$

$$D[XY] = D[X]D[y]. \qquad (17)$$

вычислялось значение функции (10).

Вычисления методом Монте-Карло 10^5 экспериментов производилось по схеме, представленной на рисунке 1.

Был принят следующий порядок вычисления целевой функции с помощью метода Монте-Карло при вероятностном задании параметров a_i и $\bar{k}_j(x)$:

а) формирование отрезков, которым принадлежат параметры a_i и $\bar{k}_j(x)$;

б) генерирование случайных чисел из интервалов;

в) вычисление целевой функции;

г) обработка выборки результатов (математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение).

Расчеты $P(x)$ (10) проводились следующим образом:

по формулам (11) определяем интервальное значение $P(x)$, а затем на его основе по формулам (12)–(17) вычисляем математическое ожидание и дисперсию;

определяем дисперсию и математическое ожидание по формулам (12)–(17);

вычисляем математическое ожидание и дисперсию методом Монте-Карло.

Полученные результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты вычислений

	Мат. ожидание	Дисперсия	Среднекв. отклонение
Результаты расчетов интервального значения $P(x)$ (11–17)	0,5975	0,01782	0,1335
Результаты расчета по аналитическим формулам (12–17)	0,5725	0,00066	0,0257
Результаты расчета методом Монте-Карло	0,5723	0,0045	0,0669

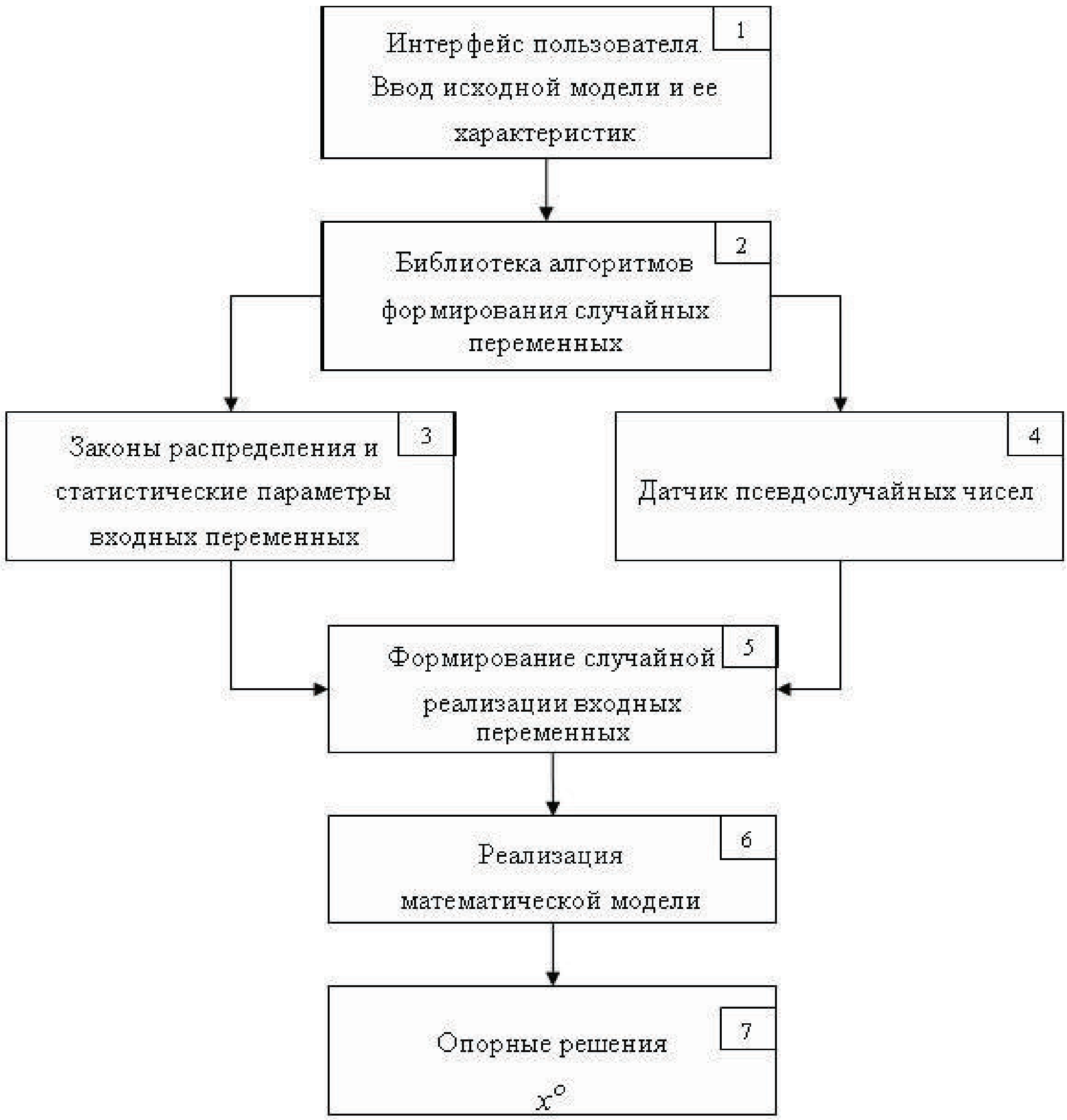

Рисунок 1 – Схема вычисления методом Монте-Карло

При проверке гипотезы о законе распределения получили, что нижняя граница критической области $\chi^2_{кр}$ равна 6.0, а наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл}$ равно 0.8812. Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то гипотеза о том, что случайные величины распределены по нормальному закону распределения, принимается.

Выводы

Результаты расчетов показывают, что, как и ожидалось, оценки математического ожидания, полученные на основе интервальной математики (11), выше и отличаются на 4,18% от аналитической оценки, вычисленной по формулам (12-17), и на 4,21% от

 ISSN 1562-9945

полученного методом Монте – Карло. Что касается среднеквадратического отклонения σ, то различие составляет соответственно 79,4% и 49,88%. Рассогласование между аналитической оценкой по формулам (12-17) и полученной методом Монте-Карло можно объяснить малым числом экспериментов (10^5). Таким образом, можно сделать вывод, что вероятностная интерпретация интервальных значений позволяет получить более узкие интервалы возможных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Е.Г., Новожилова М.В., Гребенник І.В. Методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах. – К.: Техніка, 2004.– 256с.
2. Петров Э.Г., Писклакова О.А. Анализ подходов к решению задачи поиска оптимального решения в условиях неопределенности// Вестник ХНТУ. – 2007. - № 4(27). – С. 14-19.
3. Нариньяни А.С. НЕ-факторы: неоднозначность (доформальное исследование)// Новости искусственного интеллекта.– 2003.–№5. с.58-69.
4. Валькман Ю.Р. Интеллектуальные технологии исследовательского проектрования: формальные системы и семеотические модели.– Киев: Port Rojal, 1998.– 250с.
5. Математический энциклопедический словарь/ под ред. Ю.В. Прохорова.– М.: Сов. энциклопедия, 1988.– 250с.
6. Фишбери П. Теория полезности для принятия решений.– М.: Наука, 1978.–352с.
7. Литвак Б.Г. Экспертная информация: методы получения и анализа.– М.: Радио и связь,1982.– 184с.
8. Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э. Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации/ Под общей редакцией Э.Г.Петрова –К: Наукова думка, 2002. –164с.
9. Стерпин М.Ю., Шепелев Г.И. Метод представления знаний в интеллектуальных системах поддержки экспертных решений// новости искусственного интеллекта,2003.– №4(58) с. 24-33.
10. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления: Пер. с англ. –М. Мир, 1987. – 360 с., ил.
11. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: «Мир», 1976.
12. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятности и ее инженерное приложение.– М.: Высшая школа, 2000.–480с.

Получено 06.03.2008 г.