УДК 338.5.0187

Н.Б. Андрейшина, В.В. Гоцуленко, О.А. Поддубная

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РАВНОВЕСНОЙ ЦЕНЫ С УЧЕТОМ ЕЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ВО ВРЕМЕНИ

Введение. Спрос и предложение является неотъемлемыми категориями рыночной организации ведения хозяйства, которые выражают объективные экономические отношения товарного производства. Это два важнейших понятия, с помощью которых описывается взаимодействие продавцов и покупателей, каждый из которых стремится к максимально полному удовлетворению своих потребностей. Определение количественной трактовки спроса и предложения является необходимым условием их исследования. Существует множество подходов формирования спроса и предложения как функций других экономических величин. Так, в теории Вальраса формирования цены [1,6], спрос и предложение рассматриваются как математические функции аргументом которых она является.

Далее под спросом на определенный товар будем понимать зависимость платежеспособной потребности покупателей, имеющих доступ к определенному рынку, в определенном количестве этого товара от существующей цены на этот товар и тенденции изменения цены во времени. Под предложением будем понимать зависимость количества товаров, которое поставщик готов поставлять для продажи, от установленной продажной цены, и тенденции изменения цены во времени. Покупатели определенного товара всегда будут предпочитать купить его по более низкой цене, а продавцы – продать его по более высокой. То есть цена товара является одним из важнейших факторов, как для спроса, так и для предложения, и одновременно общим для них фактором. Наряду с ценой, на спрос явно влияет субституты и реклама, а на предложение – уровень развития технологии в данной отрасли [3]. Соотношение спроса и предложения на рынке постоянно изменяется. Формируя спрос и стимулируя сбыт, заставляя потребителей покупать товары и ускоряя процесс “купли-продажи”, а отсюда оборачиваемость капитала, реклама выполняет на рынке экономическую функцию. Используя свои возможности направленного воздействия на определенные категории потребителей, реклама все в большей степени выполняет функцию управления спросом.

В соответствии с теорией спроса и предложения реальная ценность товара равняется фактической цене, которая устанавливается на рынке в соответствии со спросом и предложением товара. Однако отметим, что если рассматривать цену как функцию времени, то спрос и предложение как математические функции, одним из аргументов которых она является, будут по разному от нее зависеть. Так, значение цены $p(t)$ в данный момент времени t даст эффект на изменение спроса лишь через некоторый промежуток времени запаздывания τ, например необходимый для рекламы товара или анализа его качества и.т.д. В свою очередь предложение, формируется наличием товара и его ценой лишь непосредственно в данный момент времени.

Составление математической модели и ее анализ. Построим математическую модели, в которой спрос и предложение будут рассматриваться как функции, зависящие от цены товара и тенденции ее формирования, а также в которой будет учитываться запаздывающий характер влияния цены на формирования функции спроса.

Отметим, что рассматривая спрос и предложение лишь как функции от значения цены является мало информативным с точки зрения динамики. Например, допустима ситуация, когда положение динамики с малым значением цены и положительным показателем тенденции ее изменения более выгодно чем случай, когда значение цены в данный момент времени является достаточно большим, а тенденция ее изменения является отрицательной [5].

В связи с чем, далее будем рассматривать спрос D как функцию от цены p и тенденции ее изменения (во времени) q, т.е. $D = D(p,q)$ и аналогично предложение $S = S(p,q)$. Рассмотрим их как линейные формы (3):

$$\begin{cases} S(p,q) = a_1 \cdot p + b_1 \cdot q + c_1, \\ D(p,q) = a_2 \cdot p + b_2 \cdot q + c_2. \end{cases} \tag{1}$$

В силу приведенных выше рассуждений, в динамике по времени t получаем, что:

$$\begin{cases} D(t) = D(p(t-\tau), q(t)), \\ S(t) = S(p(t), q(t)), \end{cases} \tag{2}$$

 ISSN 1562-9945

где $q(t)=\dfrac{dp(t)}{dt}$.

Из соотношения баланса спроса и предложения, учитывая формулы **(2)**, приходим к следующему дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом:

$$D\left(p(t-\tau),\frac{dp}{dt}\right)=S\left(p(t),\frac{dp}{dt}\right), \qquad \textbf{(3)}$$

или учитывая **(2)**

$$\frac{dp}{dt}=k_1\cdot p(t-\tau)+k_2\cdot p(t)+k_3 \qquad \textbf{(4)}$$

где $k_1=\dfrac{a_1}{b_2-b_1}$, $k_2=\dfrac{a_2}{b_1-b_2}$, $k_3=\dfrac{c_1-c_2}{b_2-b_1}$.

Далее, отметим, что для получения однозначного решения уравнения **(3)** необходимо задание на отрезке запаздывания $[0,\tau)$ некоторой начальной функции $p_0(t)$: что в корне отличает рассматриваемую задачу, например от задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения **[4]**. Разобьем ось времени R^+ на интервалы длины τ, т. е. $R^+=\bigcup\limits_{m=0}^{\infty}[m\cdot\tau,(m+1)\cdot\tau)$, при $t\in[0,\tau)$ $p(t)=p_0(t)$.

Рассмотрим следующую последовательность задач Коши:

при $t\in[\tau,2\tau)$ $\dfrac{dp_1}{dt}=k_1\cdot p_0(t-\tau)+k_2\cdot p_1(t)+k_3\cdot p_1(\tau)=p_0(\tau)$;

при $t\in[2\tau,3\tau)$ $\dfrac{dp_2}{dt}=k_1\cdot p_1(t-\tau)+k_2\cdot p_2(t)+k_3\cdot p_2(2\tau)=p_1(2\tau)$;

………………………………………………………………….

m) при $t\in[m\tau,(m+1)\tau)$ $\dfrac{dp_m}{dt}=k_1\cdot p_{m-1}(t-\tau)+k_2\cdot p_m(t)+k_3,\ p_m(m\tau)=p_{m-1}(m\tau)$.

и т. д.

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 1. *Пусть имеется задача Коши*

$$\frac{dp}{dt}=k_1\cdot\nu(t)+k_2\cdot p(t)+k_3,\ t\in[a,b],\ p(a)=\nu(a),\ \nu\in C[a,b].$$

Обозначим ее решение через $P(a,b,t,\nu)$, *тогда*

$$P(a,b,t,\nu)=\nu(a)\cdot\exp\{k_2\cdot(t-a)\}+\frac{k_3}{k_2}\left[\exp\{k_2\cdot(t-a)\}-1\right]+k_1\int\limits_a^t\exp\{k_2\cdot(t-\xi)\}\nu(\xi)\,d\xi.$$

Из леммы 1 непосредственно получается следующее рекуррентное соотношение:

$$p_m(t) = P\big(m\cdot\tau,(m+1)\cdot\tau,t,p_{m-1}\big) = p_{m-1}(m\cdot\tau)\cdot\exp\{k_2\cdot(t-m\cdot\tau)\} +$$
$$+\frac{k_3}{k_2}\big[\exp\{k_2\cdot(t-m\cdot\tau)\}-1\big] + k_1\int_{m\cdot\tau}^{t}\exp\{k_2\cdot(t-\xi)\}\,p_{m-1}(\xi-m\cdot\tau)\,d\xi.$$

Следовательно решение уравнения (4) с начальным условием при $t\in[0,\tau)$, $p(t)=p_0(t)$, можно представить в следующем виде:

$$p(t)=\sum_{0}^{\infty}\chi_m(t)\cdot p_m(t) \tag{5}$$

где как обычно символом $\chi_m(t)$ обозначена характеристическая функция полуинтервала $[m\cdot\tau,(m+1)\cdot\tau)$, т. е.

$$\chi_m(t)=\begin{cases}1, & если\ t\in[m\cdot\tau,(m+1)\cdot\tau)\\ 0, & если\ t\notin[m\cdot\tau,(m+1)\cdot\tau)\end{cases}.$$

Замечание 1. Отметим, что т.к. при любом фиксированном значении переменной $t\ge 0$ существует лишь единственный содержащий ее полуинтервал в последовательности $\{[m\cdot\tau,(m+1)\cdot\tau)\}_{m=0}^{\infty}$, то на самом деле в соотношении (5) при каждом фиксированном значении $t\ge 0$ лишь одно слагаемое отлично от нуля.

Анализ динамики равновесной цены в зависимости от времени длительности рекламы. Основное внимание сосредоточим на изучении поведения функции цены $p(t)$ в зависимости от длительности времени рекламы τ, в связи с чем, для уменьшения технических выкладок, коэффициент k_2 при слагаемом без запаздывания в основном уравнении (4) положим равным нулю и в данном случае оно примет вид:

$$\frac{dp}{dt}=k_1\cdot p(t-\tau)+k_3 \tag{6}$$

В случае, когда начальная цена $p_0(t)=const$, получим более удобное для асимптотического анализа представление решения уравнения (6) чем соотношение (5) для этого рассмотрим следующую вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Единственное решение задачи Коши*

$$\begin{cases}При\ t\in[0,\tau)\ p(t)=p_0=const,\\ при\ t\ge\tau\ \dfrac{dp}{dt}=k_1\cdot p(t-\tau),\end{cases}$$

определяется следующим соотношением

 ISSN 1562-9945

$$p(t) = p_0 \sum_{m=0}^{N(t)} \frac{k_1^m}{m!}(t - m \cdot \tau)^m,$$

где $N(t) = \left[\dfrac{t}{\tau}\right]$ *– целая часть числа* $\dfrac{t}{\tau}$.

Действительно, положим $\varphi_m(t) = p_0 \cdot \dfrac{k_1^m}{m!}(t - m \cdot \tau)^m,\ m \ge 0$, и проверим, что функция $p(t) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} \varphi_m(t)$ является решением рассматриваемой задачи. Имеем: $\forall t > 0$ найдется единственное целое неотрицательное число $t \in [q \cdot \tau, (q+1) \cdot \tau) \Rightarrow \left[\dfrac{t}{\tau}\right] = q$, и следовательно $p(t) = \sum_{m=0}^{q} \varphi_m(t)$. Но тогда $p(t-\tau) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{t-\tau}{\tau}\right]} \varphi_m(t-\tau) = \sum_{m=0}^{q-1} \varphi_m(t-\tau)$. Далее, $\dfrac{dp}{dt} = \sum_{m=0}^{q} \dfrac{d\varphi_m(t)}{dt}$ и прямая подстановка дает $\sum_{m=1}^{q} \left\{ \dfrac{d\varphi_m(t)}{dt} - k_1 \cdot \varphi_{m-1}(t-\tau) \right\} = 0$, так как $\varphi_0(t) = p_0 = const$, но функция $\varphi_m(t)$, $m \ge 0$, как можно проверить, удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$\frac{d\varphi_m(t)}{dt} - k_1 \cdot \varphi_{m-1}(t-\tau) = 0,\ m \ge 1.$$

Итак, лемма доказана.

Далее, можно видеть, что константа $p(t) = -\dfrac{k_3}{k_1}$ является частным решением уравнения (6). Поэтому, объединяя этот факт и лемму (2), получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Задача*

$$\begin{cases} При\ t \in [0,\tau),\ \ p(t) = p_0 = const, \\ при\ t \ge \tau,\ \ \dfrac{dp}{dt} = k_1 \cdot p(t-\tau) + k_3, \end{cases} \tag{7}$$

имеет единственное решение

$$p(t) = -\frac{k_3}{k_1} + (p_0 + \frac{k_3}{k_1}) \sum_{m=0}^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} \frac{k_1^m}{m!}(t - m \cdot \tau)^m \tag{8}$$

Замечание 2. Практические расчеты [3] показывают, что вообще говоря относительно знаков коэффициентов справедливы следующие неравенства:

$$\begin{cases} k_1 < 0, \\ \dfrac{k_3}{k_1} > 0, \\ p_0 + \dfrac{k_3}{k_1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 < 0, \\ k_3 > 0, \\ p_0 < -\dfrac{k_3}{k_1} \end{cases} \tag{9}$$

Далее, если не оговорено противное, будем всюду предполагать выполненными неравенства (9).

Отметим также тот факт, что функция (8) является функцией двух аргументов $p = p(t,\tau)$. Возникает важный для практических целей вопрос: какова величина τ времени рекламы продукции, при которой ее эффективная цена наибольшая. Где эффективность цены означает, что ее величина не должна противоречить балансу спроса и предложения. Очевидно, что достаточно долгая реклама продукции, особенно некачественной, может привести даже к вынужденному снижению ее эффективной цены. Также, если $\tau \to 0$, т.е. когда реклама длится в коротком временном промежутке, ее эффективность также снижается.

Следовательно, в общих чертах возникает проблема рационального выбора времени τ рекламирования продукции. Формализация этой проблемы приводит к следующей экстремальной задаче:

Для любого фиксированного $t > 0$ найти время рекламы $\tau = \tau(t) \to \min$, так чтобы выполнялось

$$p(t,\tau(t)) = \max_{0<\tau\le t}\{p(t,\tau)\}.$$

Следующая лемма оценивает асимптотическое поведение цены $p(t,\tau)$ при $\tau \to 0$ и любом фиксированном значении $t \ge 0$.

Лемма 3. *При* $\tau \to 0$ *справедливо следующее асимптотическое равенство*

$$p(t,\tau) = -\frac{k_3}{k_1} + \left(p_0 + \frac{k_3}{k_1}\right) \cdot \exp\{k_1 \cdot t\}(1 + \eta \cdot \tau),$$

где $\eta(\tau) = 0$, *причем равномерно по* t *принадлежащему фиксированному отрезку конечных размеров.*

Из леммы 3 элементарно следует, что

$$\lim_{\substack{\tau\to 0 \\ t=const}} p(t,\tau) = -\frac{k_3}{k_1} + \left(p_0 + \frac{k_3}{k_1}\right) \cdot \exp\{k_1 \cdot t\}$$

 ISSN 1562-9945

Отметим также, как следует из (8), что $p(t,\tau)=p_0$ при $\tau>t$ и, следовательно

$$\lim_{\substack{\tau\to\infty \\ t=const}} p(t,\tau)=p_0$$

Замечание 3. Из соотношений (10) и (11) при предположениях замечания 2 получается очевидное, но в тоже время важное замечание:

$$\lim_{\substack{\tau\to 0 \\ t=const}} p(t,\tau) > \lim_{\substack{\tau\to\infty \\ t=const}} p(t,\tau),$$

т.е. слишком долгая реклама еще больше уменьшает эффективную цену, чем ее отсутствие вовсе.

Числовые расчеты. Для проверки полученных в предыдущих разделах теоретических соотношений, рассмотрим деятельность конкретного торгового предприятия, занимающегося продажей строительных материалов. В таблице приведены данные о цене товара, объеме реализации и товарных остатках.

Таблица 1

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Цена товара, грн.	1,14	1,05	1,05	1,04	1,04	1,04	1,09	1,11	1,15	1,16	1,14	1,15
Объем реализации, кг	112	9	102,5	98	85,5	120	111,5	102	108	97	105,5	98,5
Товарные остатки, кг	205	156	234	127	146	118	104	116	104	117	108	110

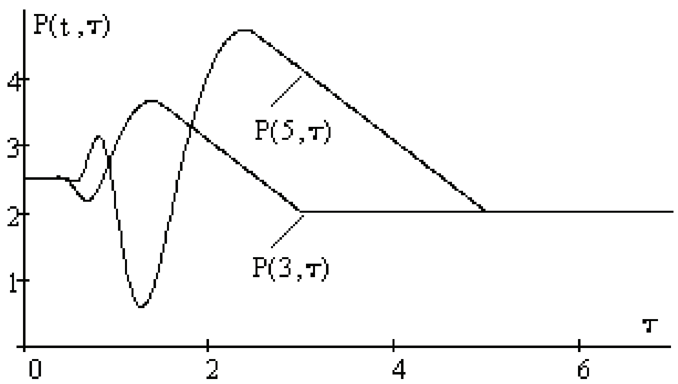

Рисунок 1 - Зависимость эффективной цены $p(t,\tau)$ от времени рекламы τ при различных значениях времени отсчета $t\geq 0$

ISSN 1562-9945

Для нахождения коэффициентов $k_i(i=1,2,3)$ в уравнение (4) воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(a_1 p_i + b_1 q_i + c_1 - D_i)^2 \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n}(a_2 p_i + b_2 q_i + c_2 - S_i)^2 \to \min, \end{cases} \quad (12)$$

где p_i цена, $q_i = \frac{p_i - p_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$ изменение цены, D_i и S_i − соответственно величины спроса и предложения в i-й период времени (т.е. в нашем случае номер месяца, n=12). Мы полагаем, что предложение формируется как сумма проданного и оставшегося товара. Изменение цены: $q_i = p_i - p_{i-1}\left(i=\overline{1,12}\right)$. Величина $q_0 = 0$, так как в начальный момент времени цена еще не сформировалась.

Получим следующие значения коэффициентов:

$k_1 = -2.07,\ k_2 = 4.31,\ k_3 = 5.2$.

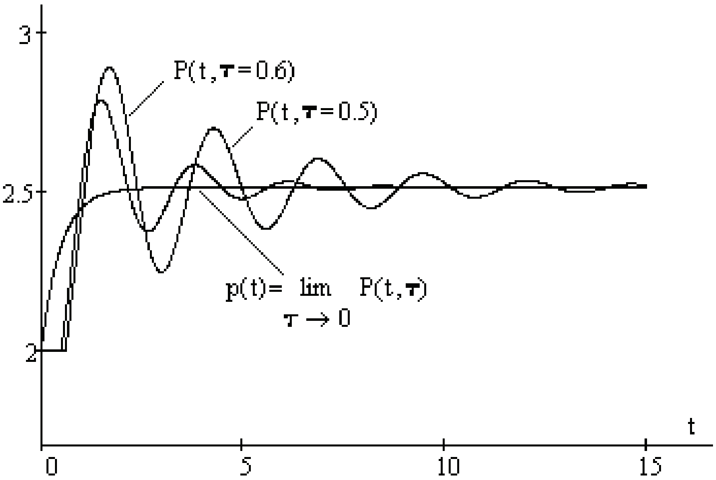

Рисунок 2 - Зависимость эффективной цены $p(t,\tau)$, как функции времени $t \geq 0$ при различных фиксированных значениях длительности времени рекламы

Выводы

1. На основании баланса спроса и предложения с учетом запаздывающего характера влияния цены на формирование спроса, получено дифференциальное уравнение для равновесной цены и проанализированы его решения;

2. Показано, что долгосрочная реклама приводит к снижению эффективной цены, а также получены соотношения определяющие

 ISSN 1562-9945

длительность времени рекламы необходимое и достаточное для получения максимального значения эффективной цены;

3. Приведены практические числовые расчеты, подтверждающие правдоподобность полученных теоретических закономерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории: Пер. с англ. М.: Мир, 1999.
2. Гоцуленко В.В., Самохвалов Т.С. Об одном классе стратегий капиталовложений в замкнутой экономической системе //Международная научная конференция "Ломоносовские чтения 2004", Черноморский филиал МГУ.
3. Андрейшина Н.Б., Гоцуленко В.В. Повышение эффективности деятельности торгового предприятия оптимальным выбором цены как функции времени //Вестник Национального технического университета "ХПИ". 2006. № 39. -С. 81-85.
4. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987.
5. Економічна теорія: Політекономія: Підручник / за ред. Базидевича В.Д. – К.: Знання –Прес, 2006.
6. Андрейшина Н.Б., Гоцуленко В.В. Об одном классе экономических систем обладающих предельным циклом//Міжнародна науково - практична конференція “Розвиток економіки в трансформаційний період: глобальний та національний аспекти”, Дніпропетровськ, 2005 р.

Получено 20.02.2008 г.

СОДЕРЖАНИЕ

 ISSN 1562-9945