УДК 530.1

Е.Н.Ватченко, А.И.Деревянко, Н.В.Лысая

УПРАВЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИМ РЕЖИМОМ ОДНОМЕРНЫХ УНИМОДАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

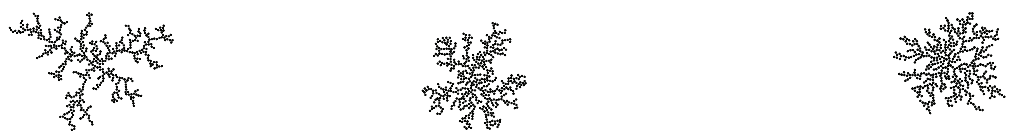
Введение. Интерес к фрактальным наноразмерным пленкам связан с их физическими свойствами, которые существенно отличаются для твердых тел с кристаллической или аморфной структурой. Для получения их традиционно используется метод CVD (химическое парофазное осаждение вещества) в котором исходное вещество испаряется в отдельной камере, переносится через газовую среду и осаждается на подложку [1].

Постановка задачи. Целью данной работы является построение алгоритмов оптимального управления хаотическим режимом логистического уравнения [2] и их сравнительный анализ для решения задачи подавления хаотических колебаний при осаждении наноматериалов по CVD-технологии из газовой фазы.

Математическая модель роста при осаждении. Дифференциальное уравнение, описывающее динамику роста наночастиц в пленке осадка, имеет вид

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\frac{1-N(t)}{K}, \tag{1}$$

где $N(t)$ количество наночастиц в пленке в момент времени t, r – темп роста, K – предельный коэффициент роста. Следует отметить, что существенное влияние на свойства наноразмерных пленок оказывает тонкая структура формирующих их кластерных образований [3].



а) D=1.546, χ=0.05 б) D=1.617, χ=0.20 в) D=1.638, χ=0.40

Рисунок 1 - Влияние коэффициента диффузии на фрактальную размерность нанокластеров

Аналитическое решение уравнения (1) имеет вид

$$N(t) = \frac{e^{rt}N(0)}{1+(e^{rt}-1)N(0)/K} \tag{2}$$

и стремится к K при $t>>1/r$. Это значит, что уравнение (1) теряет свое начальное значение $N(0)$ и будущее значение $N(t)$ определяется параметром K.

Рассмотрим дискретный вариант уравнения (1), введя замены $x(n)=N(t)/(1+1/r)$ и $a=1+r$, получим логистическое уравнение (отображение)

$$x(n+1) = ax(n)(1 - x(n)), \tag{3}$$

где $a \in [0,4]$ и $x(n) \in [0,1]$. Неподвижные точки $x(n+1)=x(n)$ отображения (3) при изменении параметра a образуют последовательность бифуркаций удвоения периода, формирующих сценарий перехода в хаотический режим [4]. Выражение (3) представляет собой рекурсивное отображение, определяющее текущее значение элемента временного ряда по значению предыдущего. Для граничного значения $a=4$ в отображении (3) устанавливается хаотический режим. Значение критерия устойчивости для неподвижной точки $x_{02}=0.75$

$$\left|\frac{dx(n+1)}{dx}\right| = \left|a - 2ax_{02}\right| = \left|-2\right| \geq 1 \tag{4}$$

характеризует ее как неустойчивую.

Инкурсивное отображение определяет текущее значение временного ряда по значениям предыдущему и прогнозу текущего имеет вид

$$x(n+1) = ax(n)(1 - x(n+1)) \tag{5}$$

Выражение (5) можно преобразовать к рекурсивному виду, воспользовавшись определением суммы элементов бесконечной геометрической прогрессии

$$x(n+1) = \frac{ax(n)}{1 + ax(n)} \tag{6}$$

Неподвижные точки отображения (6), равные $x_{01}=0$ и $x_{02}=(a\text{-}1)/a$, устойчивы при $|a|<1$ и $a>1$, соответственно. Решение нелинейного уравнения (6) имеет вид

$$x(n) = \frac{(\frac{a-1}{a})Ca^n}{1 + Ca^n}, \tag{7}$$

где

$$x(0) = \frac{\frac{a-1}{a}C}{1 + C} \tag{8}$$

и $x(0)$ − первый элемент временного ряда.

Произведя замену e на a в выражении (2), сравним выражения (2) и (7), учитывая (8). Совпадение решений для уравнений (3) и (6)

 ISSN 1562-9945

дает возможность использовать отношение (6) для определения стабилизирующего управления.

Рассмотрим два варианта оптимального

$$\frac{dJ}{dU}=0 \tag{9}$$

стабилизирующего управления

$$\textbf{1.}\ J=(x(n+1)-x(n))^2+\omega U^2(n) \tag{10}$$

$$x(n+1)=ax(n)(1-x(n))+U(n) \tag{11}$$

$$\textbf{2.}\ J=(x(n+1)-x_{inc}(n+1))^2 \tag{12}$$

$$x(n+1)=ax(n)(1-x(n))+U(n) \tag{13}$$

$$x_{inc}(n+1)=\frac{ax(n)}{1+ax(n)} \tag{14}$$

Оптимальное управляющее воздействие, стабилизирующее хаотический режим логистического уравнения (3) для случаев (10) и (12) имеет вид

$$1.\ U(n)=\frac{x(n)-ax(n)(1-x(n))}{1+\omega} \tag{15}$$

$$2.\ U(n)=ax(n)\frac{x(n)-ax(n)(1-x(n))}{1+ax(n)} \tag{16}$$

Для сравнительной оценки стабилизирующих управляющих воздействий (15) и (16) рассмотрим логистическое уравнение (3) при значении параметра a=4, определяющих хаотический режим (3).

Рассмотрим стабилизирующее управление (10), (15). В этом случае неподвижные точки x_{01}=0 и x_{02}=0.75 совпадают со значениями неподвижных точек нестабилизированного ($U(n)$=0) логистического уравнения (3). Тогда значение критерия устойчивости для неподвижной точки x_{02}=0.75 будет

$$\left|\frac{4\omega-8\omega x_{02}}{1+\omega}\right|=\left|\frac{2\omega}{1+\omega}\right|\le 1, \tag{17}$$

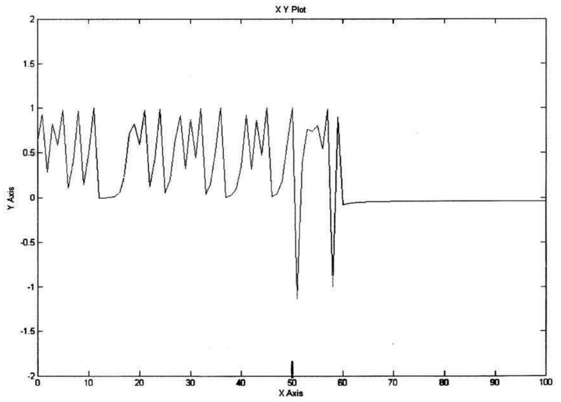
т.е. при $0<\omega<1$ решение x_{02} уравнения (11) устойчиво.

Рассмотрим стабилизирующее управление (12), (16). В этом случае неподвижные точки x_{01}=0 и x_{02}=0.75 совпадают со значениями неподвижных точек нестабилизированного ($U(n)$=0) логистического уравнения (3). Значение критерия устойчивости для неподвижной точки x_{02}=0.75 будет

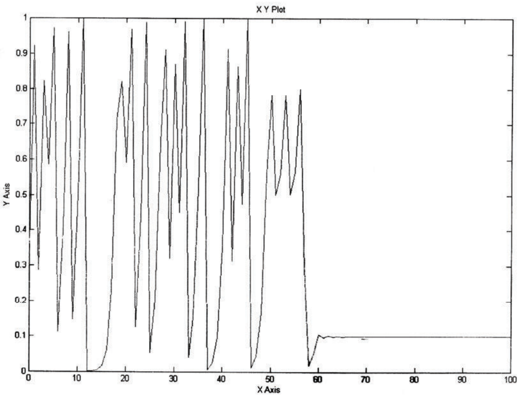
$$\left|\frac{a}{(1+ax_{02})^2}\right|=\left|\frac{1}{4}\right|<1 \tag{18}$$

т.е. решение x_{02} уравнения (13) устойчиво.

Результаты численных экспериментов по стабилизации (подавлению) хаотических колебаний в решении уравнения (3) приведены на рисунке 2, где включение соответствующего управления производилось на 50 шаге.



а) воздействие (15)



б) воздействие (16)

Рисунок 2 - Подавление хаотических колебаний управляющими воздействиями U

Выводы. Результаты компьютерного эксперимента показали, что для управляющего воздействия (15) затухание (длительность переходного процесса) зависит от значения коэффициента ω ($0<\omega<1$), который является величиной постоянной для действующего закона управления.

Управляющее воздействие (16) может быть получено из (15) заменой $\omega=1/ax(n)$. Таким образом, для управления (16) затухание определяется текущим значением управляемой переменной. Это объясняет меньшую длительность переходного процесса для управления (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Суздалев И.П. Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов. М.: Наука, 2006. - 592 с.
2. Schuster H., Just W. Deterministic Chaos. – Verlag, 2005. – 283p.
3. Деревянко А.И., Михалев А.И. Моделирование динамики геометрического фазового перехода. Системні технології, Міжвузівський збірник наукових праць. 3(44), 2006,с. 27-31.
4. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. К.: Наукова думка, 1989. - 216 с.Тишер Ф. Техника измерений на сверхвысоких частотах. – М.: Физматлит, 1963. – 364 с.

Получено 21.11.07 г.