УДК 62-50:519.49

В.М. Григорьев

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

Актуальность темы. Для работы с линейными нестационарными системами представленными в операторной форме широко используется теория матриц над кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов. Для изучения устойчивости таких систем пространство устойчивых сигналов должно быть замкнуто относительно действия дифференциальных операторов. В работе предлагается пространство устойчивых сигналов, абелева группа которого имеет структуру левого модуля над кольцом операторов.

Постановка задачи. В работе предлагается модификация понятия устойчивости системы в терминах вход-выход, учитывающая собственные движения систем и базирующаяся на первом методе Ляпунова.

Обоснование полученных результатов. Характеристический показатель Ляпунова (в дальнейшем просто показатель) функции x из пространства X бесконечно дифференцируемых за исключением конечного числа точек функций определяется как верхний предел

$$\chi(\mathrm{x}) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t)|}{t}, \ \chi(0) = -\infty.$$

Функция x имеет строгий показатель, если существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)|}{t}$.

Для числа $\alpha<0$ определим множество

$$M_a = \{\mathrm{x}\in \mathrm{X} \mid \chi(\mathrm{x}^{(i)})< \alpha,\ \mathrm{i} = 0, 1,2 \ldots\} \quad (1)$$

Заметим, что $\forall m\in M_a \ \overline{\lim_{t\to\infty}} \mathrm{m(t)} = 0$. Выделим в подмножество

$$\overline{M}_\alpha = \{\mathrm{m}\in M_\alpha \mid \exists \mathrm{C_i}>0 \ \forall \mathrm{t}\in \mathrm{D}(\mathrm{m}^{(i)}) \ |\mathrm{m}^{(i)}(\mathrm{t})|\le \mathrm{C_i},\ \mathrm{i} = 0, 1,2 \ldots\}, \quad (2)$$

где D(.) – область определения функции.

Если, например, α=-2, то $e^{-3t}/t \in M_a$, но $e^{-3t}/t \notin \overline{M}_\alpha$.

Любая функция из M_a, начиная с некоторого момента T будет ограниченной. Более того, согласно 34, 83 , имеем

$$\forall \varepsilon\ \exists C > 0\ \ |m(t)| \le C\ e^{(\chi(m)+\varepsilon)t},\ t > T,\ t \in D(m). \tag{3}$$

Рассмотрим произвольное поле Q функций со строгим нулевым показателем, замкнутое относительно дифференцирования. Примером такого поля является множество дробно рациональных функций. Рассмотрим кольцо линейных дифференциальных операторов с коэффициентами в поле Q. Выделим в поле Q подкольцо Q_T, состоящее из функций, не имеющих полюсов при $0 \le t < \infty$(полюса в бесконечности долустимы). Выделим в R подкольцо R_T операторов с коэффициентами из Q_T.

Теорема 1. Множества M_α и $\overline{M_\alpha}$ являются абелевыми группами, имеющими структуру левого R и R_T модулей, соответственно.

Согласно [1, 2]

$$\chi(x_1 + x_2) \le \max(\chi(x_1),\ \chi(x_2)),\ \forall x_1,\ x_2 \in X \tag{4}$$

Из соотошений (1), (4) и линейности дифференцирования следует, что M_α- абелева группа. Рассмотрим теперь $m_1,\ m_2 \in \overline{M_\alpha}$. Согласно (2) $\exists C_{1,i},\ \exists C_{2,i}\ \forall t \in D(m_1^{(i)})\ |m_1^{(i)}(t)| \le C_{1,i},\ \forall t \in D(m_2^{(i)})\ |m_2^{(i)}(t)| \le C_{2,i}$. Тогда $\forall t \in D((m_1'(t) + m_2'(t))^{(i)}) \supseteq D(m_1^{(i)}) \cap D(m_2^{(i)})\ |(m_1'(t) + m_2'(t))^{(i)}| \le C_{1,i} + C_{2,i}$, т.е. $m_1 + m_2$ лежит в $\overline{M_\alpha}$.

Определим операции умножения

$\forall\ m \in M_\alpha\ \forall\ r \in R\ rm = (\sum_i q_i p^i)m = \sum_i q_i m^{(i)}),\ q_i \in Q.$

$\forall\ m \in \overline{M_\alpha}\ \forall\ r \in R\ rm = (\sum_i q_i p^i)m = \sum_i q_i m^{(i)}),\ q_i \in Q_T.$

Так как абелевы группы M_α и $\overline{M_\alpha}$ замкнуты относительно дифференцирования, то для доказательства теоремы следует показать, что $\forall q \in Q,\ \forall m \in M_\alpha\ \ qm \in M_\alpha$ и $\forall q_T \in Q_T,\ \forall m \in \overline{M_\alpha}\ \ q_T m \in \overline{M_\alpha}$.

Элементы из Q и Q_T имеют строгий нулевой показатель, поэтому согласно [1, 2] для любого q из Q и m из M_α $\chi(qm) = \chi(m) < \alpha$. Дифференцируя qm произвольное число раз, убеждаемся, что $\chi((qm)^{(i)}) < \alpha$. Отсюда следует, что qm лежит в M_α.

 ISSN 1562-9945

Пусть $q_T \in Q_T$, $\forall m \in \overline{M_\alpha}$, тогда $q_T m \in M_\alpha$. q_T и m ограничены вместе со всеми своими производными в своих областях определения. Следовательно $q_T m \in \overline{M_\alpha}$.

Согласно неравенства (3) элементы множеств M_α и $\overline{M_\alpha}$ экспоненциально убывают. Следовательно, эти множества можно назвать пространствами устойчивых сигналов.

Введём множества

$$S_0(M_\alpha{}^n) = \{S \in R^{nxn} | \forall x \in X^n \, (Sx=0^n) \Rightarrow x \in M_\alpha{}^n\} \quad (5)$$

$$S(M_\alpha{}^n) = \{S \in R^{nxn} | \forall x \in X^n \; \forall u \in M_\alpha{}^n \, (Sx=u) \Rightarrow x \in M_\alpha{}^n\} \quad (6)$$

$$S_0(\overline{M_\alpha}{}^n) = \{S \in R^{nxn} | \forall x \in X^n \, (Sx=0^n) \Rightarrow x \in \overline{M_\alpha}{}^n\} \quad (7)$$

$$S(\overline{M_\alpha}{}^n) = \{S \in R^{nxn} | \forall x \in X^n \; \forall u \in \overline{M_\alpha}{}^n \, (Sx=u) \Rightarrow x \in \overline{M_\alpha}{}^n\} \quad (8)$$

Очевидно, что $S(M_\alpha{}^n) \subseteq S_0(M_\alpha{}^n)$, $S(\overline{M_\alpha}{}^n) \subseteq S_0(\overline{M_\alpha}{}^n)$.

Изучим свойства множеств (5) – (8).

Утверждение 1. Пусть $S_1 \in S(M_\alpha{}^n)$, $S_2 \in S_0(M_\alpha{}^n)$, а матрицы U_1, $U_2 \in R^{nxn}$ обратимы над R. Обозначим $\overline{S}_1 = U_1 S_1 U_2$, $\overline{S}_2 = U_1 S_2 U_2$. Тогда , $\overline{S}_1 \in S(M_\alpha{}^n)$, $\overline{S}_2 \in S_0(M_\alpha{}^n)$.

Рассмотрим уравнения $\overline{S}_1 x_1=u$, $u \in M_\alpha{}^n$ и $\overline{S}_2 x_2=0^n$. Произведём замену неизвестных: $z_i= U_2 x_i$, i=1,2 и умножим уравнения слева на U_1^{-1}. От последнего действия решения уравнений согласно Леммы из [3] не изменятся. Получим $S_1 z_1=u_1$, $S_2 z_2=0^n$, где $u_1= U_1^{-1} u$. В силу теоремы 1 $u_1 \in M_\alpha{}^n$. Из определения множеств $S_0(M_\alpha{}^n)$ и $S(M_\alpha{}^n)$ следует, что в последних равенствах функции z_i, i=1,2 лежат в $M_\alpha{}^n$. Так как $x_i = U_2^{-1} z_i$ и $U_2^{-1} \in R^{nxn}$, то в силу теоремы 1 $x_i \in M_\alpha{}^n$, i=1,2 . Согласно определениям (5) и (6) имеем $\overline{S}_1 \in S(M_\alpha{}^n)$, $\overline{S}_2 \in S_0(M_\alpha{}^n)$.

Утверждение 2. Пусть $S_1 \in S_0(\overline{M_\alpha}{}^n)$, $S_2 \in S(\overline{M_\alpha}{}^n)$, а матрица $U \in R^{nxn}$ обратима над R. Тогда $US_1 \in S_0(\overline{M_\alpha}{}^n)$. Однако в общем случае $S_1 U \notin S_0(\overline{M_\alpha}{}^n)$, и $S_2 U$, $US_2 \notin S(\overline{M_\alpha}{}^n)$.

Рассмотрим уравнение $S_1 x=0^n$. Так как $x \in \overline{M_\alpha}{}^n$, то в силу Леммы из [3] $US_1 \in S_0(\overline{M_\alpha}{}^n)$. Для уравнения $S_2 Ux=u$, $u \in \overline{M_\alpha}{}^n$ сделаем замену z=Ux. Так как $S_2\in S(\overline{M_\alpha}^n)$ и $S_2z=u$, то $z\in\overline{M_\alpha}^n$. В общем случае $U^{-1}\notin R_T^{nxn}$ и $x=U^{-1}z$ не лежит в $\overline{M_\alpha}^n$, т.е. $S_2U\notin S(\overline{M_\alpha}^n)$. Взяв уравнение $S_1Ux=0^n$ аналогично доказываем, что $S_1U\notin S_0(\overline{M_\alpha}^n)$. Перейдём к уравнению $US_2x=u$, $u\in\overline{M_\alpha}^n$. В Q^{nxn} найдётся такая матрица V, что $VS_2\in R_T^{nxn}$. Тогда $\overline{S}_2x=u_1$, где $\overline{S}_2=VS_2$ и $u_1=VU^{-1}u$. В общем случае $U^{-1}\notin R_T^{nxn}$ и $u_1\notin\overline{M_\alpha}^n$. Пусть $x\in\overline{M_\alpha}^n$. Согласно теореме 1 $\overline{S}_2x\in\overline{M_\alpha}^n$. Противоречие.

Утверждение 3. Пусть $A\in R^{nxn}$, rkA=n. Приведём A к верхней правой треугольной матрице B. Если диагональные элементы $b_{1,1}$, $b_{1,2}$ … $b_{n,n}$ матрицы B лежат в $S(M_\alpha)$, то $A\in S(M_\alpha^n)$. При $b_{n,n}\in S_0(M_\alpha)$ и $b_{1,1}$, $b_{1,2}$ … $b_{n-1,n-1}\in S(M_\alpha)$ имеем $A\in S_0(M_\alpha^n)$. Из того, что матрица A лежит в $S(M_\alpha^n)$ или в $S(\overline{M_\alpha}^n)$, следует, что диагональные элементы матрицы B лежат в $S_0(M_\alpha)$ $(S_0(\overline{M_\alpha}))$.

Рассмотрим систему уравнений Ax=u, $u\in M_\alpha^n$. Умножим её слева на обратимую в R^{nxn} матрицу U, приводящую A к B: Bx=v, v=Bu. Распишем последнее уравнение построчно

$$\begin{gathered} b_{1,1}x_1 = -(b_{1,2}x_2 + \ldots + b_{1,n}x_n) + v_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-1,n-1}x_{n-1} = -b_{n-1,n}x_n + v_{n-1} \\ b_{n,n}x_n = v_n, \end{gathered} \tag{9}$$

где $x=(x_1\ x_2 \ldots x_{n-1})^T$, $v=(v_1\ v_2 \ldots v_{n-1})^T$.

Так как по условию $b_{i,i}\in S(M_\alpha)$, i=1, 2 … n, то решая (9) снизу вверх, на основании теоремы 1 и определения множества $S(M_\alpha)$ имеем, что $x\in M_\alpha^n$. Следовательно $B\in S(M_\alpha^n)$. Используя утверждение 1, получаем $A\in S(M_\alpha^n)$. Пусть $b_{n,n}\in S_0(M_\alpha)$ и $b_{1,1}$, $b_{1,2}$ … $b_{n-1,n-1}\in S(M_\alpha)$. Аналогично имеем $A\in S_0(M_\alpha^n)$. Положим $u=0^n$. Согласно определению $S(M_\alpha^n)$ $(S(\overline{M_\alpha}^n))$ все решения x_i , i=1, 2 … n лежат в $M_\alpha(\overline{M_\alpha})$. Система (9) допускает решения в виде $(x_1\ x_2 \ldots x_i\ 0 \ldots 0)^T$, где x_i - любое решение уравнения $b_{i,i}x_i=0$, i=1, 2 … n. Из (5) (соответственно (7)) следует, что $b_{i,i}\in S_0(M_\alpha)$ $(b_{i,i}\in S_0(\overline{M_\alpha}))$.

 ISSN 1562-9945

Утверждение 4. Пусть диагональные элементы $b_{i,i}$, i=1, 2 … n-1 матрицы B лежат в $S(\overline{M}_\alpha)$ и $b_{n,n} \in S_0(\overline{M}_\alpha)$, а наддиагональные элементы расположены в R_T. Тогда $A \in S_0(\overline{M}_\alpha{}^n)$.

Рассмотрим уравнение (9) при $v_i=0$, i=1, 2 … n. Так как $b_{n,n} \in S_0(\overline{M}_\alpha)$, то $x_n \in \overline{M}_\alpha$. Решая уравнение снизу вверх и учитывая, что $b_{i,i} \in S(\overline{M}_\alpha)$, i=1, 2 … n-1, $b_{i,j} \in R_T$, i=1, 2 … n-1, j=i+1, i+2 … n в силу теоремы 1 имеем $x_i \in \overline{M}_\alpha$, i=1, 2 … n-1. Следовательно $B \in S_0(\overline{M}_\alpha{}^n)$. Поскольку $A=U^{-1}B$, то воспользовавшись утверждением 2, получим $A \in S_0(\overline{M}_\alpha{}^n)$.

Определим следующую рановидность устойчивости в терминах вход-выход [4], которая учитывает собственные движения системы.

Назовём линейную нестационарную многосвязную систему

$$Ax = Bu, \tag{10}$$

где $A \in R_T{}^{n\times n}$, $B \in R_T{}^{n\times m}$ $\overline{M}_\alpha$-инвариантной, если при любом входе , $u \in \overline{M}_\alpha{}^m$ её выходы x лежат в $\overline{M}_\alpha{}^n$.

Утверждение 5. Если система (10) $\overline{M}_\alpha$-инвариантна, то $A \in S_0(\overline{M}_\alpha{}^n)$. Обратно, если $A \in S(\overline{M}_\alpha{}^n)$, то эта система $\overline{M}_\alpha$-инвариантна.

Пусть система (10) $\overline{M}_\alpha$-инвариантна. Положим $u=0^n$. Все решения уравнения $Ax=0^n$ лежат в $\overline{M}_\alpha{}^n$, что в соответствии с (7) означает $A \in S_0(\overline{M}_\alpha{}^n)$.

Обратно. Пусть $A \in S(\overline{M}_\alpha{}^n)$. Из теоремы 1 получим $Bu \in \overline{M}_\alpha{}^n$. Из определения множества $S(\overline{M}_\alpha{}^n)$ в (8) следует, что $x \in \overline{M}_\alpha{}^n$, т.е. система (10) $\overline{M}_\alpha$-инвариантна.

Выводы. Первый метод Ляпунова позволил определить пространство устойчивых сигналов, замкнутое относительно действия линейных нестационарных дифференциальных операторов. Изучены условия устойчивости линейных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
2. Теория показателей Ляпунова и её приложение к вопросам устойчивости. / Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. М.: Наука, 1966. 576 с.
3. Григорьев В.М. Совместность и эквивалентность линейных нестационарных систем управления // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 2 (10). - Дніпропетровськ, 2003. - С. 104–112.
4. Дезоер Ч., Видъясагар М. Синтез систем с обратной связью: вход-выходные соотношения. М.: Наука, 1983. 280 с.

Получено 13.11.2007 г.