

УДК 519.876.2:37.018.4

Л.И. Цвиркун, С.Н. Трипутень

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЧАСТИ СТЕНДА С НЕУСТОЙЧИВЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ ЛАБОРАТОРИИ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ ИНТЕРНЕТ

Введение

В настоящее время известно значительное количество программных систем, предназначенных для решения задач связанных с дистанционным обучением (так называемым e-Learning).

В данной работе рассматривается стенд с неустойчивым динамическим объектом такой лаборатории [1].

Разрабатываемый стенд состоит из двигателя постоянного тока (1), зубчато-ременной передачи (2-4), датчика угла поворота (5), маятника (6), удерживаемого в вертикальном положении и блока управления (БУ), подсоединенного к серверу (рисунок 1).

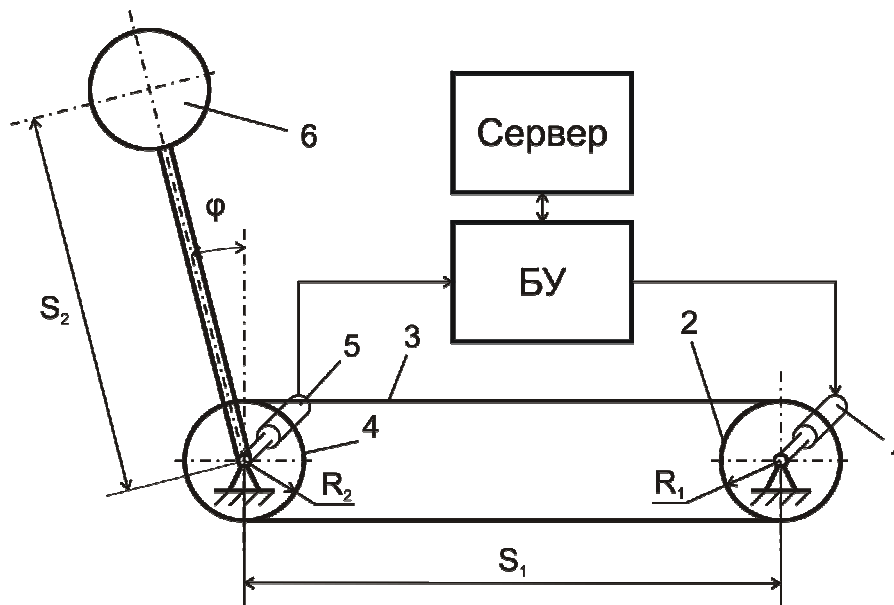


Рисунок 1 - Схема разрабатываемого стенда

Постановка задачи

При разработке алгоритма управления положением маятника важно иметь математическую модель исследуемого объекта. Данный вопрос является одним из важнейших при реализации сложных законов управления.

Модель данного объекта имеет механическую и электрическую части.

Целью настоящей работы является структуризация исследуемого неустойчивого динамического объекта, выделение в нем механической составляющей, разработка и анализ математической модели механической части объекта для дальнейшего ее применения при разработке алгоритмов управления на данном стенде лаборатории.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

- собрать данные об объекте;
- выявить его физическую и энергетическую структуры;
- на базе полученной информации разработать математическую модель механической части объекта управления;
- определить порядок взаимодействия всех блоков системы.

Математическая модель системы

С точки зрения автоматизации управление положением маятника можно рассматривать, как типичную задачу разработки системы управления электроприводом, который, в свою очередь, представляет собой электромеханическую систему [2]. Она включает в себя БУ, двигатель, передаточный механизм (ПМ) в виде зубчато-ременной передачи и исполнительный механизм (ИМ) в виде маятника (рисунок 1).

Выделим в ней механическую часть. Для этого в схеме электрического двигателя определим электрическую и механическую составляющие. Электрическую составляющую представим в виде электромеханического преобразователя (ЭМП), а механическую – ротора двигателя (РД).

Таким образом, электрическая часть (ЭЧ) этой электромеханической системы состоит из БУ и ЭМП, а механическая включает в себя все связанные движущиеся массы привода и механизма, рисунок 2.

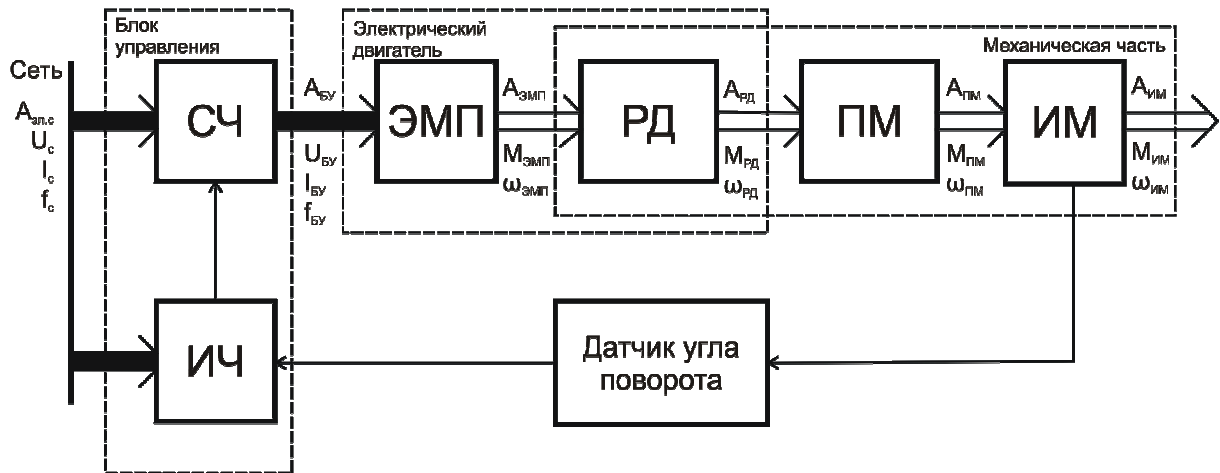


Рисунок 2 - Структурная схема электромеханической системы с выделением механической и электрической частей

На рисунке 2 поток энергии от сети к рабочему органу механизма показан стрелками. Передача потока электрической энергии показана сплошными утолщенными стрелками, а механической – тонкими двойными. Потребляемая из сети электрическая энергия ($A_{эл.с}$) при напряжении (U_c) токе (I_c) и частоте сети (f_c) поступает в силовую часть (СЧ) БУ, которая регулирует поступление электрической энергии в двигатель.

Чаще всего СЧ БУ представляет собой управляемый преобразователь электрической энергии того или иного вида. Электрическая энергия СЧ БУ ($A_{бу}$) при напряжении $U_{бу}$, токе $I_{бу}$ и частоте $f_{бу}$ потребляется двигателем и преобразуется в механическую энергию ротора двигателя $A_{рд}$ [2].

Информационная часть (ИЧ) БУ вырабатывает воздействия, управляющие СЧ, на основе информации о заданных режимах работы и о текущем состоянии системы.

ЭМП можно рассматривать как идеализированный двигатель, ротор которого не обладает механической инерцией и не имеет механических потерь. Этот ротор при скорости $\omega_{эмп}$ развивает электромагнитный момент двигателя $M_{эмп}$ и вырабатывает энергию $A_{эмп}$. Эта энергия передается ротору двигателя (РД), как механическому звену и частично расходуется на увеличение запасенной в его массе кинетической энергии и на компенсацию момента механических потерь двигателя. Оставшаяся часть

механической энергии с ротора двигателя $A_{р\delta}$ поступает через ПМ в виде механической энергии ПМ $A_{пм}$ в ИМ. На пути от ротора двигателя до ИМ часть энергии затрачивается на увеличение запаса кинетической энергии движущихся масс ПМ и ИМ, а также на компенсацию всех механических потерь в них.

На схеме механическая энергия ИМ $A_{им}$ представляет собой полезную механическую работу, которая совершается моментом $M_{им}$ на рабочем органе при скорости соответственно $\omega_{им}$.

Данная схема достаточно хорошо структурирована для того, чтобы использовать алгебраические методы построения математической модели.

Построение математической модели механической части

Механическая часть электромеханической системы (рисунок 2) включает в себя следующие связанные движущиеся массы: РД, ПМ и ИМ. К РД при скорости $\omega_{эмп}$ приложен электромагнитный момент $M_{эмп}$ и момент сопротивления M_c , под действием которых механическая часть приводится в движение, а ИМ совершает механическую работу.

Для непосредственного представления о движущихся массах установки и механических связях между ними составим кинематическую схему механической части стенда (рисунок 3), где J_1 – момент инерции РД, J_3, J_4 – моменты инерции ПМ, J_2 – момент инерции ИМ, c_{13}, c_{34} и c_{42} – жесткость механических связей. На кинематической схеме и далее примем, что $\omega = \omega_{эмп}$, $M = M_{эмп}$.

При составлении данной кинематической схемы принято, что механическая часть привода содержит четыре вращательно движущиеся сосредоточенные массы, причем механическая инерция элементов, связывающих эти массы, не учитывается. Каждый вращательно движущийся элемент обладает моментом инерции J_i и связан с $(i+1)$ -м элементом механической связью, обладающей жесткостью $c_{i,i+1}$.

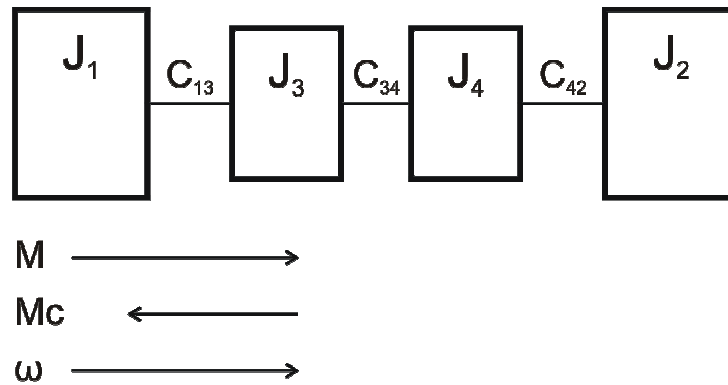


Рисунок 3 - Кинематическая схема стенда

Одной из первых задач проектирования и исследования механических систем является составление упрощенных расчетных схем механической части, в которых пренебрегаются упругостью достаточно жестких механических связей и приближенного учитывается влияния малых движущихся масс.

При этом следует учитывать, что в связи с наличием передач различные элементы системы движутся с разными скоростями и поэтому непосредственно сопоставлять их моменты инерции J_i , жесткости связей $c_{i,i+1}$, деформации $\Delta\varphi_i$ и перемещения φ_i , невозможно. Как следствие, для составления расчетных схем механической части электропривода необходимо приведение всех параметров элементов кинематической цепи к одной расчетной скорости. Обычно наибольшее удобство представляет приведение их к скорости двигателя.

Условием соответствия приведенной расчетной схемы реальной механической системе является выполнение закона сохранения энергии. При приведении необходимо обеспечить сохранение запаса кинетической и потенциальной энергии системы, а также элементарной работы всех действующих в системе сил и моментов на возможных перемещениях.

В этом случае при линейных кинематических связях $i_{li} = const$ для расчета приведенных моментов M_{npi} и моментов инерции J_{npi} элементов кинематической системы, перемещений φ_{npi} , жесткостей механических связей c_{npi} можно использовать следующие формулы [3]:

$$J_{npi} = J_i / i_{li}^2, \quad \varphi_{npi} = \varphi_i i_{li}, \quad c_{npi} = c_i / i_{li}^2 \quad \text{и} \quad M_{npi} = M_i / i_{li},$$

После приведения значений к расчетной скорости представляется возможным, сопоставив приведенные значения моментов инерции и жесткостей, осуществить выбор главных масс и главных упругих связей и на этой основе составить приближенную расчетную схему механической части. Для большей наглядности сопоставления по результатам приведения построим приведенную расчетную схему и представим в ней массы в виде прямоугольников, площадь которых пропорциональна приведенным моментам инерции, а жесткости связей между ними в виде соединений, длина которых обратно пропорциональна жесткости (прямо пропорциональна податливости связей).

Для дальнейшего упрощения выделим в схеме две наиболее значительные массы – ротор двигателя с моментом инерции J_1 и маятник с приведенным моментом инерции J_2 .

Рассматривая эту схему, можно увидеть, что вследствие малости остальных моментов инерции ее можно существенно упростить. Для этого малые массы добавим к большим близлежащим массам, а затем определим эквивалентные жесткости связей между полученными массами по общей формуле:

$$1/c_{\text{экв}} = 1/c_1 + 1/c_2 + 1/c_3 + \dots$$

При переходе к упрощенной расчетной схеме необходимо просуммировать все внешние приложенные к массам силы, связи между которыми принимаются жесткими [2].

Таким образом, данную механическую систему можно привести к двухмассовой схеме (рисунок 4).

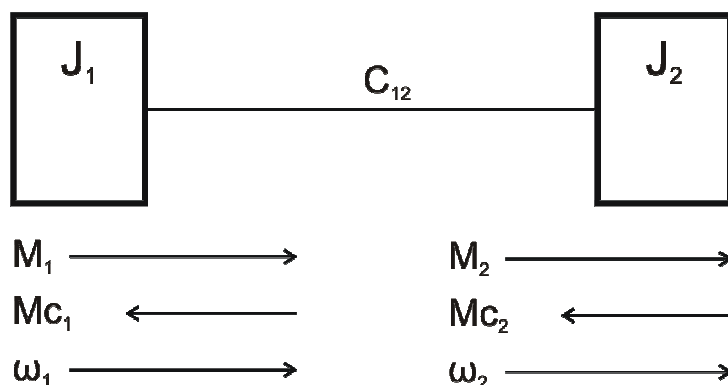


Рисунок 4 - Приведенная кинематическая схема станда

Механическая часть электропривода представляет собой систему твердых тел, на движение которых наложены ограничения, определяемые механическими связями. Уравнения механических

связей устанавливают соотношения между перемещениями в системе, а в тех случаях, когда задаются соотношения между скоростями ее элементов, соответствующие уравнения связей обычно интегрируются.

В механике такие связи называются голономными. В системах с голономными связями число независимых переменных – обобщенных координат, определяющих положение системы, равно числу степеней свободы системы.

Известно, что наиболее общей формой записи дифференциальных уравнений движения таких систем являются уравнения движения в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа) [4]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W_k}{\partial q_i} = Q_i,$$

где W_k – запас кинетической энергии системы, выраженный через обобщенные координаты q_i и обобщенные скорости \dot{q}_i ; $Q_i = \delta A_i / \delta q_i$ – обобщенная сила, определяемая суммой элементарных работ δA_i – всех действующих сил на возможном перемещении δq_i .

Или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_k}{\partial q_i} = Q'_i,$$

где L – функция Лагранжа; Q'_i – обобщенная сила, определяемая суммой элементарных работ δA_i всех внешних сил на возможном перемещении δq_i .

Функция Лагранжа представляет собой разность кинетической W_k и потенциальной W_n энергий системы, выраженных через обобщенные координаты q_i и обобщенные скорости \dot{q}_i , т. е.:

$$L = W_k - W_n$$

Уравнения Лагранжа дают единый и достаточно простой метод математического описания динамических процессов в механической части привода, а их число определяется только числом степеней свободы системы.

В качестве обобщенных координат могут быть приняты как различные угловые, так и линейные перемещения в системе. Поэтому при математическом описании динамики механической части

системы с помощью уравнений Лагранжа не требуется предварительного приведения элементов к одной скорости.

Однако, как было отмечено, до выполнения операции приведения в большинстве случаев невозможно количественно сопоставлять между собой различные массы системы и жесткости связей между ними, следовательно, невозможно выделить главные массы и главные упругие связи, определяющие минимальное число степеней свободы системы, подлежащее учету при проектировании.

Поэтому составление приведенных расчетных механических схем и их возможное упрощение являются первым важным этапом расчета сложных электромеханических систем электропривода независимо от способа получения их математического описания.

Получим уравнения движения, соответствующие обобщенным расчетным механическим схемам стенда.

В трехмассовой упругой системе обобщенными координатами являются угловые перемещения масс (φ_1 , φ_2 и φ_3), а им соответствуют обобщенные скорости ω_1 , ω_2 и ω_3 . Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = W_k - W_n = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} - \frac{c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} - \frac{c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3)^2}{2}$$

Для определения обобщенной силы Q'_i необходимо вычислить элементарную работу всех приложенных к первой массе моментов на возможном перемещении:

$$\delta A_1 = (M - M_{c1}) \delta A_1$$

Следовательно, $Q'_1 = M - M_{c1}$.

Аналогично определяются две другие обобщенные силы:

$$Q'_2 = -M_{c2}; \quad Q'_3 = -M_{c3}.$$

С учетом этих выражений, получим следующую систему уравнений движения [2]:

$$\left. \begin{aligned} M - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - M_{c1} &= J_1 \frac{d\omega_1}{dt}; \\ c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) - M_{c2} &= J_2 \frac{d\omega_2}{dt}; \\ c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) - M_{c3} &= J_3 \frac{d\omega_3}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В (1) пропорциональные деформациям упругих связей моменты являются моментами упругого взаимодействия между движущимися массами системы:

$$M_{12} = c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2); M_{23} = c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3). \quad (2)$$

С учетом (2) систему уравнений движения можно представить в таком виде (3):

$$\left. \begin{aligned} M - M_{12} - M_{c1} &= J_1 \frac{d\omega_1}{dt}; \\ M_{12} - M_{23} - M_{c2} &= J_2 \frac{d\omega_2}{dt}; \\ M_{23} - M_{c3} &= J_3 \frac{d\omega_3}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Рассматривая (3), можно установить, что уравнения движения приведенных масс электропривода одностипны и отражают второй закон Ньютона.

Движение двухмассовой упругой системы на основе уравнений (3) при $J_3 = 0$, $M_{23} = 0$ и $M_{c3} = 0$ описывается уравнениями (4):

$$\left. \begin{aligned} M - M_{12} - M_{c1} &= J_1 \frac{d\omega_1}{dt}; \\ M_{12} - M_{c2} &= J_2 \frac{d\omega_2}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Необходимо отметить, что в нашем случае, кроме момента сопротивления M_{c2} , на вторую массу будет действовать также момент маятника, зависящий от угла наклона. Таким образом, система (4) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= M - M_{12} - M_{c1}; \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} &= M_{12} - M_{c2} - mgl \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где m - масса всей системы маятника; l - расстояние от оси вращения до центра масс; g - ускорение свободного падения;

Полученные системы уравнений движения (5) позволяют проанализировать динамические особенности механической части стенда, как объекта управления, пользуясь методами теории автоматического управления. Основой для анализа являются

структурные схемы, вид которых определяется принятой расчетной схемой механической части.

Для получения структурной схемы трехмассовой упругой механической системы (1) продифференцируем:

$$\frac{dM_{12}}{dt} = c_{12}(\omega_1 - \omega_2); \quad \frac{dM_{23}}{dt} = c_{23}(\omega_2 - \omega_3). \quad (6)$$

Далее положим в (3) и (6) $d/dt = p$ получим

$$\left. \begin{aligned} M - M_{12} - M_{c1} &= J_1 p \omega_1; \\ M_{12} - M_{23} - M_{c2} &= J_2 p \omega_2; \\ M_{23} - M_{c3} &= J_3 p \omega_3; \\ p M_{12} &= c_{12}(\omega_1 - \omega_2); \\ p M_{23} &= c_{23}(\omega_2 - \omega_3). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Системе уравнений (7) соответствует структурная схема, приведенная на рисунке 5 [2].

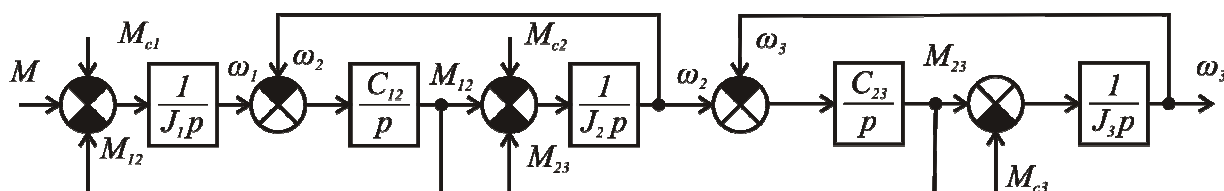


Рисунок 5 - Структурная схема трехмассовой механической системы

Она дает представление о механической части электропривода в виде трехмассовой упругой системы, как объекте управления. Управляющим воздействием здесь является электромагнитный момент двигателя M , а возмущениями – моменты нагрузки M_{c1} , M_{c2} и M_{c3} . Регулируемыми переменными могут быть скорости ω_1 , ω_2 и ω_3 , перемещения φ_1 , φ_2 и φ_3 , а также нагрузки упругих связей M_{12} и M_{21} . Структурно механическая часть электропривода представляет собой сложный объект, состоящий из цепочки интегрирующих звеньев, замкнутых перекрестными внутренними обратными связями.

Аналогично, на основе (4) получим систему уравнений (8) двухмассовой упругой механической системы без учета внутреннего демпфирования:

$$\left. \begin{aligned} M - M_{12} - M_{c1} &= J_1 p \omega_1; \\ M_{12} - M_{23} - M_{c2} &= J_2 p \omega_2; \\ p M_{12} &= c_{12}(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Более детальный анализ свойств этой системы можно провести на основе двухмассовой расчетной схемы, структура которой представлена на рисунке 6.

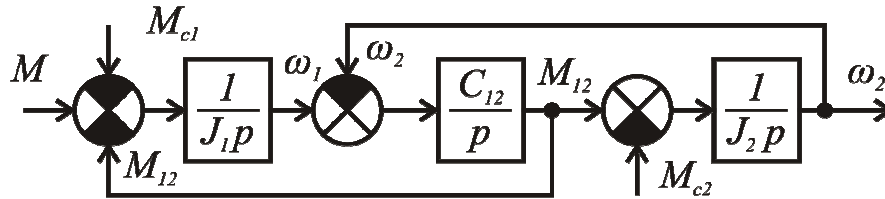


Рисунок 6. Структурная схема двухмассовой механической системы

Для исследования свойств этой системы, как объекта управления, примем возмущения $M_{c1} = M_{c2} = 0$, перенесем внутреннюю связь по упругому моменту на выход системы и выполним преобразования структурной схемы двухмассовой упругой механической системы без учета внутреннего демпфирования (рисунок 7).

Таким образом, получены системы уравнений, описывающие механическую часть станда в виде двух- и трехмассовой систем. Также приведено ее описание и структурная схема в пространстве сигналов, а путем эквивалентных преобразований получена передаточная функция, связывающая момент с угловой скоростью системы.

Выводы

Проведенные исследования позволили:

- определить, что неустойчивый динамический объект станда представляет собой электромеханическую систему, электрическая часть которой состоит из электромеханического преобразователя энергии и блока управления, а механическая включает в себя все связанные движущиеся массы привода и исполнительного механизма;
- разработать математическую модель механической части станда в виде двухмассовой расчетной схемы.
- получить передаточную функцию механической части станда, связывающую момент с угловой скоростью системы.

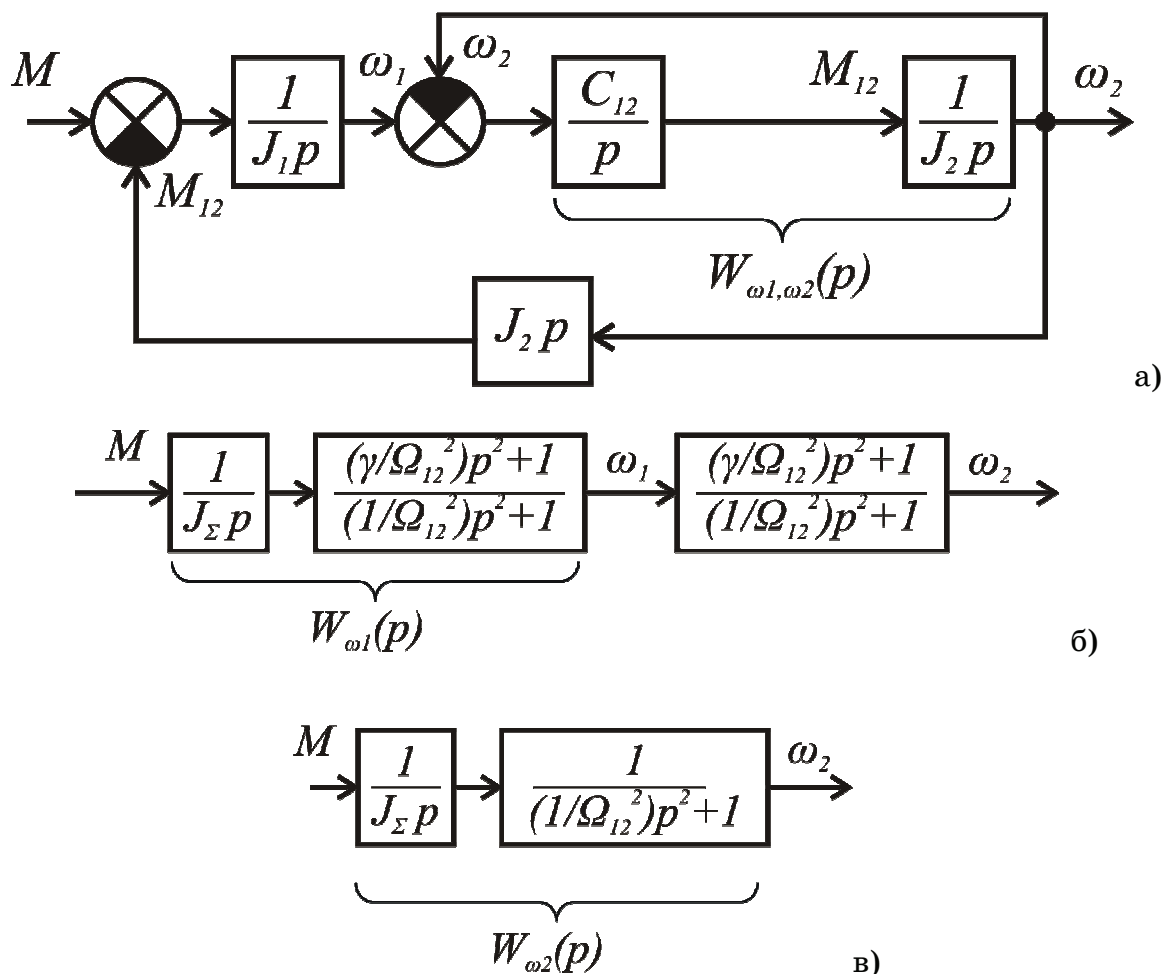


Рисунок 7 - Преобразование структурной схемы двухмассовой механической системы: исходная схема (а), перенесение внутренней связи по упругому моменту (б), преобразованная схема (в)

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsvirkun L., Kmitina I., Goncharuk S. Cisco Systems concepts implementation for studying complex mechatronic system via Internet // Proceedings 6th RoEduNet International Conference. – Craiova, 2007. – P. 156–158.
2. Ключев В. И. Теория электропривода: Учеб. для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1998. – 704 с.
3. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин и др.; Под общ. ред. К. С. Колесникова. (Сер. Механика в техническом университете; Т. 1) – М.: Изд-во МВТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. – 736 с.
4. Справочник по электрическим машинам: В 2-х т. Т. 2/ Под общ. ред. И. П. Копылова, Б. К. Клокова. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 688 с.

Получено 15.01.2008 г.