

УДК 539.3

Г.А. Старушенко, Б.Е. Рогоза

ОБЗОР И АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ ТРЕХФАЗНОЙ МОДЕЛИ В МЕХАНИКЕ КОМПОЗИТОВ. ЧАСТЬ II

2. Использование трехфазной модели в теории осреднения

Рассмотрим двухфазный микронеоднородный материал, состоящий из непрерывной матрицы и периодически расположенных в ней цилиндрических включений квадратного профиля. Будем предполагать, что структура двоякопериодична с периодом, одинаковым в обоих направлениях, и включения расположены по квадратной сетке (рис. 2.1).

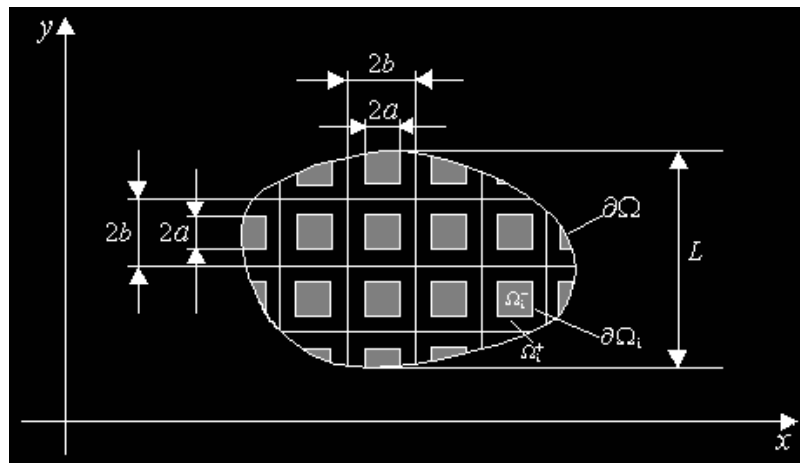


Рисунок 2.1 – Поперечное сечение композита с цилиндрическими включениями

При исследовании теплопроводности такой структуры определяющими соотношениями является неоднородное уравнение Лапласа с соответствующими условиями сопряжения на границах раздела фаз и граничными условиями на внешнем контуре всего композита:

$$\lambda^+ \Delta u^+ = F \text{ в } \Omega_i^+; \quad \lambda^- u^- = F \text{ в } \Omega_i^-; \quad (2.1)$$

$$u^+ = u^- \text{ на } \partial\Omega_i; \quad \lambda^+ \frac{\partial u^+}{\partial n} = \lambda^- \frac{\partial u^-}{\partial n} \text{ на } \partial\Omega_i, \quad (2.2)$$

где u^+ , u^- – функции распределения температуры соответственно в матрице Ω_i^+ и включениях Ω_i^- ; F^+ , F^- – соответствующая плотность тепловых источников; n – внешняя нормаль к контуру включения.

Применение метода осреднения [13] позволяет свести исходную задачу (2.1)-(2.2) к рассмотрению задачи в характерной структурной единице композита – ячейке (рис. 2.2).

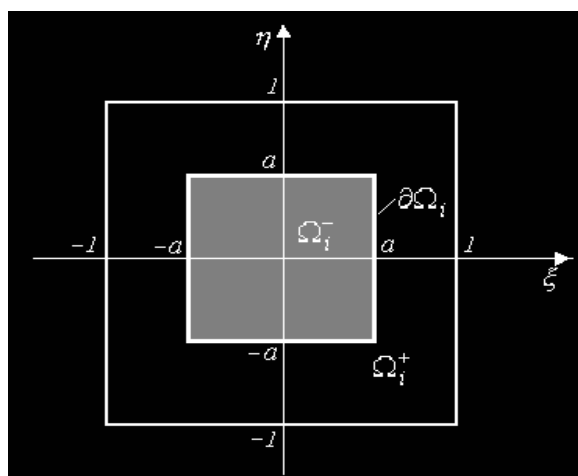


Рисунок 2.2 – Характерная структурная ячейка композитного массива

Тогда в «быстрых» переменных ξ, η «задача на ячейке», или локальная задача, записывается следующим образом [5]:

$$\frac{\partial^2 u_1^+}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial \eta^2} = 0 \text{ в } \Omega_1^+; \quad \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial \eta^2} = 0 \text{ в } \Omega_1^-; \quad (2.3)$$

$$u_1^+ = u_1^-; \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial u_1^-}{\partial \xi} = (\lambda - 1) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \text{ при } \xi = \pm a$$

$$u_1^+ = u_1^-; \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial \eta} - \lambda \frac{\partial u_1^-}{\partial \eta} = (\lambda - 1) \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \text{ при } \eta = \pm a$$

$$u_1^+ \Big|_{\xi=1} = u_1^+ \Big|_{\xi=-1}; \quad u_1^+ \Big|_{\eta=1} = u_1^+ \Big|_{\eta=-1}; \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \frac{\partial u_1^+}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-1}; \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = \frac{\partial u_1^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-1}. \quad (2.5)$$

Используем для решения локальной задачи (2.3)-(2.5) трехфазную модель композитной структуры.

С физической точки зрения это означает следующее: все, кроме одной, ячейки композита, заменим эквивалентной гомогенной средой $\tilde{\Omega}$, имеющей неизвестный (искомый) приведенный коэффициент теплопроводности $\tilde{\lambda}$. Таким образом, приходим к задаче для двухфазного включения в бесконечной области (рис. 2.3).

С математической точки зрения такая идеализация приведет, во-первых, к замене условий периодичности (2.5) условиями гладкого сопряжения матрицы с эквивалентной однородной средой; и во-вторых, к условиям затухания функции распределения температуры и теплового потока в осредненной среде при значительном удалении от включения.

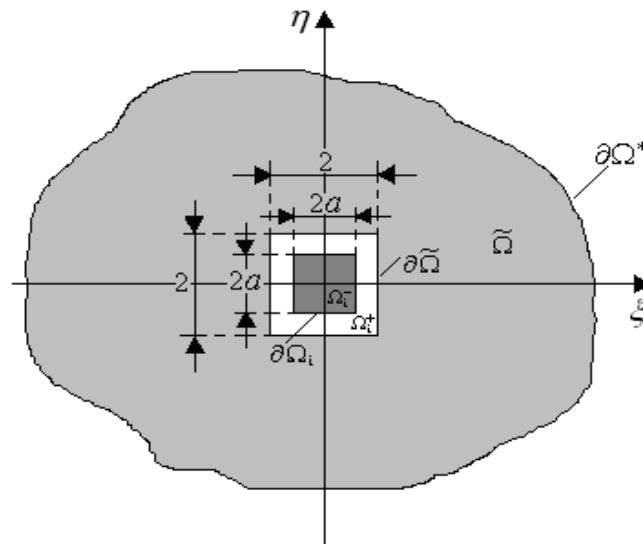


Рисунок 2.3 – Трехфазная модель ячейки с квадратным включением

Выражение для функции распределения температуры \tilde{u} в осредненной области $\tilde{\Omega}$ представим в виде следующего асимптотического ряда по степеням малого параметра ε :

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{u}_1(x, y, \xi, \eta) + \varepsilon^2 \tilde{u}_2(x, y, \xi, \eta) + \dots \quad (2.6)$$

Следовательно, задача на ячейке (2.3)-(2.5) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 u_1^+}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial \eta^2} = 0 \text{ в } \Omega_i^+; \quad \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial \eta^2} = 0 \text{ в } \Omega_i^-; \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \eta^2} = 0 \text{ в } \tilde{\Omega}_i; \quad (2.7)$$

$$u_1^+ = u_1^-; \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial u_1^-}{\partial \xi} = (\lambda - 1) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \text{ при } \xi = \pm a; \quad (2.8)$$

$$u_1^+ = u_1^-; \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial \eta} - \lambda \frac{\partial u_1^-}{\partial \eta} = (\lambda - 1) \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \text{ при } \eta = \pm a$$

$$u_1^+ = \tilde{u}_1; \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial \xi} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} = (\tilde{\lambda} - 1) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \text{ при } \xi = \pm 1; \quad (2.9)$$

$$u_1^+ = \tilde{u}_1; \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial \eta} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \eta} = (\tilde{\lambda} - 1) \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \text{ при } \eta = \pm 1$$

$$\tilde{u}_1 \rightarrow 0; \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \pm\infty; \quad \tilde{u}_1 \rightarrow 0; \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \eta} \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \pm\infty. \quad (2.10)$$

Для решения локальной задачи (2.7)-(2.10) используем метод возмущения формы границы [2, 4], в соответствии с которым контуры включения $\partial\Omega_i$ и ячейки $\partial\tilde{\Omega}$ в полярной системе координат r, θ описываются уравнениями вида:

$$r = r_0 + \varepsilon_1 f(\theta), \quad (2.11)$$

где $r_0 = \text{const} > 0$; $f(\theta)$ – дифференцируемая функция, характеризующая геометрическую форму рассматриваемого контура; ε_1 – малый параметр ($|\varepsilon_1| \ll 1$).

В данном случае соотношение (2.11) применительно к контурам $\partial\Omega_i$ и $\partial\tilde{\Omega}$ представим соответственно следующим образом:

$$r^- = r_0^-(1 + \varepsilon_1 \cos 4\theta + \dots); \quad r^+ = r_0^+(1 + \varepsilon_1 \cos 4\theta + \dots). \quad (2.12)$$

Математический смысл этой аппроксимации заключается в том, что в первом приближения квадратные контуры включения и матрицы (ячейки) заменяются на окружности. При этом радиусы соответствующих окружностей r_0^- , r_0^+ выбираются таким образом, чтобы сохранялось равенство площадей исходной и преобразованной областей матрицы и включения (рис. 2.4):

$$\pi(r_0^-)^2 = 4a^2; \quad \pi(r_0^+)^2 = 4, \quad \text{т. е.} \quad r_0^- = 2a/\sqrt{\pi}; \quad r_0^+ = 2/\sqrt{\pi}. \quad (2.13)$$

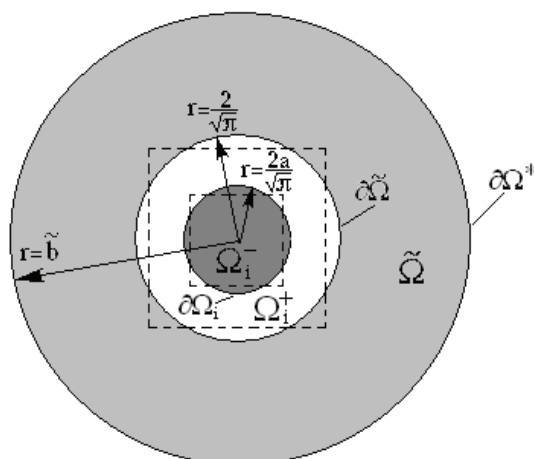


Рисунок 2.4 – Расчетная модель трехфазной структуры

Значение малого параметра ε_1 для квадратного контура, как правило, изменяется в пределах [4]: $1/6 \leq |\varepsilon_1| \leq 1/9$. В данном случае в качестве ε_1 взята величина:

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - 2/\sqrt{\pi}}{1} = \frac{a - 2a/\sqrt{\pi}}{a} = 1 - 2/\sqrt{\pi} \approx -0,13.$$

Получим решение задачи на ячейке в нулевом приближении, расчетная геометрическая модель для которого приведена на рис. 2.4.

С учетом соотношений (2.11)-(2.13) локальная задача (2.7)-(2.10) в быстрых полярных координатах r, θ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u_1^+}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_1^+}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial \theta^2} = 0 \text{ в } \Omega_1^+; \quad \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_1^-}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial \theta^2} = 0 \text{ в } \Omega_1^-; \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \theta^2} = 0 \text{ в } \tilde{\Omega};$$

$$u_1^+ = u_1^-; \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial r} - \lambda \frac{\partial u_1^-}{\partial r} = (\lambda - 1) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u_0}{\partial y} \sin \theta \right) \text{ при } r = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}; \quad (2.15)$$

$$u_1^+ = \tilde{u}_1; \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial r} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial r} = (\tilde{\lambda} - 1) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u_0}{\partial y} \sin \theta \right) \text{ при } r = \frac{2}{\sqrt{\pi}}; \quad (2.16)$$

$$\tilde{u}_1 \rightarrow 0; \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial r} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Решение граничной задачи (2.14)-(2.17) будем искать в виде:

$$u_1^- = A_1 r \cos \theta + A_2 r \sin \theta; \quad u_1^+ = \left(B_1 r + \frac{C_1}{r} \right) \cos \theta + \left(B_2 r + \frac{C_2}{r} \right) \sin \theta; \quad (2.18)$$

$$\tilde{u}_1 = \frac{D_1}{r} \cos \theta + \frac{D_2}{r} \sin \theta,$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ – произвольные постоянные.

Отметим, что в выражениях (2.18) представление функции u_1^- записано с учетом ограниченности функции распределения температуры и ее производной $\frac{\partial u^-}{\partial r}$ (теплового потока в радиальном направлении) при $r=0$, а выражение для функции \tilde{u}_1 удовлетворяет условиям затухания этих характеристик при $r \rightarrow \infty$ (2.17).

В соотношения (2.18) входят восемь произвольных постоянных – по четыре при каждой из базисных функций $\cos \theta$ и $\sin \theta$ (соответственно A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2), которые определяются из условий сопряжения (2.15)-(2.16). Системы уравнений для нахождения констант интегрирования A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 полностью идентичны, поэтому приведем решение лишь одной из них:

$$A_1 = -\left(1 + 4\tilde{\lambda}\Delta_1\right) \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad B_1 = -\left(1 + 2(\lambda + 1)\tilde{\lambda}\Delta_1\right) \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad (2.19)$$

$$C_1 = \frac{8}{\pi} a^2 (\lambda - 1) \tilde{\lambda} \Delta_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad D_1 = \frac{4}{\pi} \left(1 + 2(a^2(\lambda - 1) + \lambda + 1)\Delta_1\right) \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

где $\Delta_1 = \left((\tilde{\lambda} - 1)(\lambda - 1)a^2 - (\tilde{\lambda} + 1)(\lambda + 1) \right)^{-1}$.

Очевидно, что для произвольных постоянных A_2, B_2, C_2, D_2 имеем:

$$A_2 = A_1; \quad B_2 = B_1; \quad C_2 = C_1; \quad D_2 = D_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y} \right). \quad (2.20)$$

Дальнейшее решение задачи сводится к построению осредненных соотношений. Однако в данном случае следует принять во внимание, что осреднение должно производиться по всей трехфазной области $\Omega^* = \Omega_i^+ \cup \Omega_i^- \cup \tilde{\Omega}$ – матрице, включению, осредненной среде. Таким образом, уравнение, которое необходимо осреднить, имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x \partial \xi} + 2 \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_2^+}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2^+}{\partial \eta^2} + \lambda \left(\frac{\partial^2 u_0^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0^-}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial x \partial \xi} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_2^-}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2^-}{\partial \eta^2} \right) + \tilde{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x \partial \xi} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \eta^2} \right) = f \end{aligned} \quad (2.21)$$

Оператор осреднения [13] обобщается в данном случае таким образом:

$$(\tilde{\dots}) = \frac{1}{|\Omega^*|} \left(\iint_{\Omega_i^+} (\dots) d\xi d\eta + \lambda \iint_{\Omega_i^-} (\dots) d\xi d\eta + \lambda \iint_{\tilde{\Omega}} (\dots) d\xi d\eta \right), \quad (2.22)$$

где $|\Omega^*| = |\Omega_i^+ \cup \Omega_i^- \cup \tilde{\Omega}|$ – мера трехфазной области, границу которой формально можно считать окружностью бесконечно большого радиуса $\tilde{b} \rightarrow \infty$.

Применяя оператор осреднения (2.22) к соотношению (2.21), получаем осредненное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\Omega^*|} \left[\iint_{\Omega_i^+} \left(\frac{\partial^2 u_0^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \int_{\partial\Omega_i^+} \left(\frac{\partial u_2^+}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial u_1^+}{\partial n} \right) dl + \int_{\partial\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial u_2^+}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial u_1^+}{\partial n} \right) dl + \right. \\ & \left. + \lambda \iint_{\Omega_i^-} \left(\frac{\partial^2 u_0^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0^-}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \int_{\partial\Omega_i^-} \left(\frac{\partial u_2^-}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial u_1^-}{\partial n} \right) dl + \right. \\ & \left. + \tilde{\lambda} \iint_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \int_{\partial\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial n} \right) dl + \tilde{\lambda} \int_{\partial\tilde{\Omega}^*} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial n} \right) dl \right] = f. \end{aligned} \quad (2.23)$$

С учетом выражений для u_i^+ , u_i^- , \tilde{u}_i (2.18) осредненное уравнение (2.23) преобразуется к виду:

$$\frac{1}{|\Omega^*|} \left[|\Omega_i^+| (B+1) + \lambda |\Omega_i^-| (A+1) + \tilde{\lambda} |\tilde{\Omega}| \right] \Delta u_0 = f, \quad (2.24)$$

где q – приведенный параметр:

$$q = \frac{1}{|\Omega^*|} \left[|\Omega_i^+| (B+1) + \lambda |\Omega_i^-| (A+1) + \tilde{\lambda} |\tilde{\Omega}| \right]; \quad (2.25)$$

$$A = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^{-1} A_1 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{-1} A_2; \quad B = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^{-1} B_1 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{-1} B_2.$$

Очевидно, что коэффициент q , определяемый выражением (2.25), является искомым осредненным коэффициентом теплопроводности, т. е. именно тем приведенным параметром $\tilde{\lambda}$, который использовался в трехфазной модели для описания эквивалентной гомогенной среды $\tilde{\Omega}$. Следовательно, приравняв $\tilde{\lambda}$ выражению (2.25), приходим к линейному алгебраическому уравнению относительно искомого коэффициента $q = \tilde{\lambda}$, решая которое, находим точное аналитическое выражение для эффективного коэффициента теплопроводности:

$$q = \tilde{\lambda} = \frac{1 - a^2 + \lambda(1 + a^2)}{1 + a^2 + \lambda(1 - a^2)}. \quad (2.26)$$

3. Асимптотические соотношения и анализ решения на основе трехфазной модели

Прежде чем перейти к асимптотическому анализу полученного для эффективного коэффициента теплопроводности выражения (2.26), отметим принципиальный факт. Как известно, в силу теоремы Келлера [11], приведенные параметры теплопроводности композитов с включениями проводимости λ , симметричными в ячейке относительно прямой $\eta = \xi$, связаны соотношением:

$$q(\lambda) = \frac{1}{q(1/\lambda)}. \quad (3.1)$$

Выражение (2.26), очевидно, точно (а не асимптотически!) удовлетворяет теореме Келлера для всех значений проводимости вставок λ , включая предельные случаи $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

Далее проанализируем полученное для осредненного коэффициента теплопроводности выражение (2.26) и выведем из него все возможные асимптотики в предельных случаях значений геометрического параметра композита – размера включения a и его физической характеристики – теплопроводности вставок λ .

1. $a \rightarrow 0$ – размеры включений малы, в пределе – однородный материал с проводимостью матрицы. При любом значении проводимости включений λ имеем: $q = 1$.

2. $a \rightarrow 1$ – большие размеры включений, в пределе – однородная структура, проводимость которой равна проводимости вставок. При любых значениях λ получаем: $q = \lambda$.

3. $\lambda \rightarrow 1$ – коэффициенты теплопроводности матрицы и вставок одного порядка, в пределе – однородная структура (матрица). При всех значениях a находим: $q=1$.

4. $\lambda \rightarrow 0$ – включения малой проводимости, в пределе – композит со вставками-теплоизоляторами:

$$q = (1 - a^2) / (1 + a^2). \quad (3.2)$$

В частности, из (3.2) могут быть получены асимптотики для включений малой проводимости по их геометрическому размеру.

4.1. $a \ll 1$ – размеры включений малы. Раскладывая соотношение (3.2) в ряд по степеням малого параметра a , находим: $q = 1 - 2a^2$.

Для сравнения, прямое осреднение (осреднение по Фойгту), которое, как известно [7], дает оценку сверху приведенного коэффициента, в данном случае представляется соотношением: $\bar{q} = 1 - a^2$.

4.2. $a \rightarrow 1$, т. е. в случае, когда размеры включений-теплоизоляторов предельно большие, из (3.2) имеем соотношение

$$q = 1 - a, \quad (3.3)$$

которое совпадает с известным результатом [1], полученным как решение соответствующей задачи механики для стержневой системы.

5. $\lambda \rightarrow \infty$ – включения большой проводимости, в пределе – композит с абсолютно проводящими вставками:

$$q = (1 + a^2) / (1 - a^2). \quad (3.4)$$

Аналогично, как и в случае включений малой проводимости, получим из выражения (3.4) различные асимптотики по размеру вставок.

5.1. $a \ll 1$ – малые включения. Асимптотическое разложение выражения (3.4) в ряд по степеням малого параметра a приводит к следующему результату: $q = 1 + 2a^2$.

Для сравнения, обратное осреднение (осреднение по Рейссу), которое является оценкой снизу приведенного коэффициента [7], в данном случае определяется соотношением: $\underline{q} = 1 + a^2$.

5.2. $a \rightarrow 1$ – большие размеры включений. Из (3.4), очевидно, получаем следующее асимптотическое выражение осредненного коэффициента:

$$q = 1 / (1 - a).$$

Приведем также результаты сравнения значений эффективного параметра теплопроводности, вычисленного по формуле (2.26), с известными данными – где это возможно (таблицы 1, 2). Курсивом в таблицах 1, 2 отмечены графические результаты.

Таблица 1

Непроводящие включения

Значения приведенного коэффициента теплопроводности q			
$\lambda = 0 ; a = 1/3$			
Вариационный метод Галеркина [5]	Метод R-функций [5]	Численные решения [7]	Трехфазная модель, формула (2.26)
0,8232	0,8187	0,81	0,8000

Таблица 2

Вставки большой теплопроводности, включая случай абсолютной проводимости

Значения приведенного коэффициента теплопроводности q		
$\lambda = 10 ; a = 1/2$		
Численные решения [7]	Трехфазная модель, формула (2.26)	Погрешность решения по трехфазной модели
1,548	1,5143	-2,18%
$\lambda = 114 ; a = 1/3$		
Численные решения [7]	Трехфазная модель, формула (2.26)	Погрешность решения по трехфазной модели
1,2500	1,2451	-0,39%
$\lambda \rightarrow \infty ; a = 1/3$		
Численные решения [7]	Трехфазная модель, формула (2.26)	Погрешность решения по трехфазной модели
1,3	1,2500	-3,85%

Таким образом, анализируя приведенные выше асимптотические разложения и результаты сравнения с данными других авторов, заключаем: трехфазная модель в случае цилиндрических включений квадратного профиля уже в нулевом приближении дает достаточно точные решения для приведенного параметра теплопроводности во всем диапазоне изменения геометрического размера включений и их физической характеристики (теплопроводности), включая предельные случаи. Этот вывод подтверждается следующим:

1. решение с использованием трехфазной модели (2.26) точно удовлетворяет классической теореме Келлера (3.1);
2. асимптотическое соотношение (3.3) для предельно больших непроводящих включений совпадает с известным разложением [1];

3. сравнение значений эффективного параметра теплопроводности, вычисленного по формуле (2.26), с известными результатами других авторов (для различных случаев размеров и проводимости включений) указывают на достаточно высокую точность предлагаемого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. Л. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 252 с.
2. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. – К.: Вища школа, 1982. – 352 с.
3. Кристенсен Р. М. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
4. Немиш Ю. Н. Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела. – К.: Наукова думка, 1989. – 312 с.
5. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Asymptotic methods in the theory of perforated membranes of nonhomogeneous structure. – Engineering Transaction, 1995, v. 43, p. 5-18.
6. Batchelor G. K. Transport properties of two-phase materials with random structure. – A. Rev. Fluid Mech., 1974, v. 6, p. 227-255.
7. Bourgat J. F. Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients. – Lectures Notes in Math., 1979, v. 704, p. 330-356.
8. Christensen R. M., Lo K. H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. – J. Mechanics and Physics of Solids, 1979, v. 27, p. 315-330.
9. Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. – J. Appl. Mech., 1962, v. 29, p. 143-150.
10. Hashin Z., Rosen B. W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. – J. Appl. Mech., 1964, v. 31, p. 223.
11. Keller J. B. A theorem on the conductivity of a composite medium. – J. Math. Phys. 5, 1964, p. 548-549.
12. Kerner E. H. The elastic and thermoelastic properties of composite media. – Proceedings of the Physics Society, 1956, 69, p. 808-820.
13. Lions J.-L. On same homogenisation problem. – ZAMM, 1982, v. 62, N 5, p. 251-262.
14. Van der Pol C. On the rheology of concentrated dispersions. – Rheology Acta, 1958, 1, p. 198-211.

Получено 06.04.2007 г.