УДК 539.3

Г. А. Старушенко, Б. Е. Рогоза

ОБЗОР И АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ ТРЕХФАЗНОЙ МОДЕЛИ В МЕХАНИКЕ КОМПОЗИТОВ.

ЧАСТЬ I

Введение. Трехфазная модель композита была впервые использована в 1956-58 г.г. Кернером [12] и Ван дер Полем [14]. Суть этой модели состоит в замене всей периодической структуры, кроме одной ячейки, однородной осредненной средой с неизвестными приведенными характеристиками. Далее искомые эффективные параметры определяются из энергетического принципа: энергии, запасенные в композите и эквивалентной гомогенной среде, равны.

К достоинствам трехфазной модели следует отнести:

- возможность применения к исследованию композитов различной формы и структуры: волокнистых – с включениями различного профиля; пространственно неоднородных композитных массивов – со сферическими и кубическими включениями и др.;
- независимость общей схемы применения модели от геометрических и физических характеристик матрицы и включений композита;
- возможность применения и обобщения для широкого класса задач: полидисперсных моделей; периодически неоднородных сред с одинаковыми включениями различного профиля; к структурам с более сложной геометрией – произвольным (непериодическим) характером расположения включений; с включениями различных размеров и др.

1. Трехфазные модели композитов с цилиндрическими и сферическими включениями

Решения задач для композитов с цилиндрическими и сферическими включениями с использованием трехфазной модели приведены в трудах Р.М. Кристенсена [3,8]. Изложим основные принципы построения трехфазной модели и полученные на ее основе результаты.

1. Рассматривается непрерывная упругая среда с упругими сферическими включениями различного размера и определяется решение задачи о нахождении эффективного модуля сдвига этой структуры. Распределение размеров включений не случайное, а имеет определенный частный характер: отношение радиуса a вставки Ω^- к радиусу b матрицы Ω^+ принято постоянным для каждой составной частицы независимо от ее абсолютного размера (рис. 1.1). Это означает, что распределение размеров частиц должно быть таково, чтобы весь объем был заполнен составными частицами с $a/b = \text{const}$. Очевидно, что такое распределение требует, чтобы размеры частиц уменьшались до бесконечно малых. Такая модель была предложена Хашином [9].

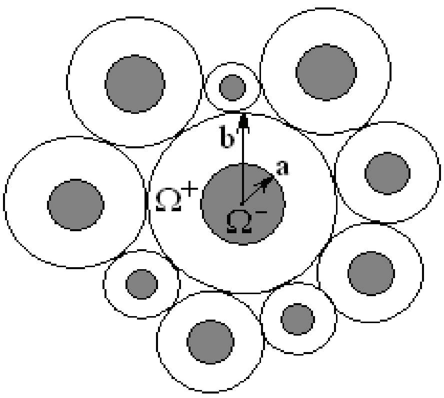

Рисунок 1.1 – Непрерывная упругая среда с упругими сферическими включениями с отношением радиусов $a/b = \text{const}$

Для решения задачи используется трехфазная модель композита, суть которой состоит в том, что заменяются все, за исключением одной, составные сферические частицы эквивалентной гомогенной средой (рис. 1.2).

Предполагается также, что бесконечная область подвержена однородной деформации на большом расстоянии от начала координат. Внешний слой $\tilde{\Omega}$, будучи эквивалентной гомогенной средой, имеет неизвестные эффективные свойства $\tilde{\mu}$ и $\tilde{k}$. Модель композита, представленная на рис. 1.2, эквивалентна эффективной гомогенной среде при условии, что энергия деформирования обеих систем одинакова при равенстве осредненных деформаций. Таким образом, искомые эффективные свойства входят в обе задачи о критерии

 ISSN 1562-9945

эквивалентности, а не только в задачу о нагружении эквивалентной гомогенной среды.

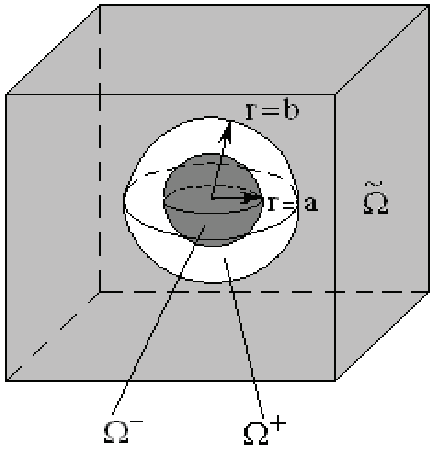

Рисунок 1.2 – Трехфазная модель композита со сферическими включениями

Метод решения задачи с использованием трехфазной модели аналогичен решению для упругих сред с малой объемной долей сферических частиц. В условиях деформации чистого сдвига на большом расстоянии от начала координат выражения для перемещений в сферических координатах r, θ, φ представляются в виде:

$$u_r = u_r(r)\sin^2\theta\cos 2\varphi;\; u_\theta = u_\theta(r)\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi;\; u_\varphi = u_\varphi(r)\sin\theta\sin 2\varphi, \quad (1.1)$$

где u_r, u_θ, u_φ – неизвестные функции r, подлежащие определению из уравнений равновесия.

Определение отдельно решения для всех трех областей, показанных на рис. 1.2 (области включения Ω^-, области матрицы Ω^+ и эквивалентной гомогенной среде $\tilde{\Omega}$), приводит к следующим результатам:

$$u_r^- = A_1 r - \frac{6\nu^-}{1-2\nu^-}\cdot A_2 r^3;\; u_\theta^- = A_1 r - \frac{7-4\nu^-}{1-2\nu^-}\cdot A_2 r^3;\; u_\varphi^- = -u_\theta^-; \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} u_r^+ &= B_1 r - \frac{6\nu^+}{1-2\nu^+}\cdot B_2 r^3 + \frac{3B_3}{r^3} + \frac{5-4\nu^+}{1-2\nu^+}\cdot\frac{3B_4}{r^2}; \\ u_\theta^+ &= B_1 r - \frac{7-4\nu^+}{1-2\nu^+}\cdot B_2 r^3 - \frac{2B_3}{r^3} + \frac{2B_4}{r^2};\; u_\varphi^+ = -u_\theta^+; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\tilde{u}_r = D_1 r + \frac{3D_3}{r^4} + \frac{5-4\tilde{\nu}}{1-2\tilde{\nu}}\cdot\frac{D_4}{r^2};\; \tilde{u}_\theta = D_1 r - \frac{2D_3}{r^4} + \frac{2D_4}{r^2};\; \tilde{u}_\varphi = -\tilde{u}_\theta, \quad (1.4)$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4, D_1, D_3, D_4$ – константы интегрирования.

Константа D_1 в соотношении (1.4) рассматривается как заданная, т. к. она определяет состояния чистого сдвига на большом расстоянии от начала координат, т. е. при $r \to \infty$. Остальные восемь постоянных находятся из системы восьми уравнений, определяющих условия непрерывности перемещений и напряжений на границах раздела фаз:

$$u_r^- = u_r^+;\ \sigma_{rr}^- = \sigma_{rr}^+;\ \sigma_{r\theta}^- = \sigma_{r\theta}^+;\ \sigma_{r\varphi}^- = \sigma_{r\varphi}^+ \quad \text{при} \quad r = a; \tag{1.5}$$

$$u_r^+ = \widetilde{u}_r;\ \sigma_{rr}^+ = \widetilde{\sigma}_{rr};\ \sigma_{r\theta}^+ = \widetilde{\sigma}_{r\theta};\ \sigma_{r\varphi}^+ = \widetilde{\sigma}_{r\varphi} \quad \text{при} \quad r = b. \tag{1.6}$$

В полученные для констант интегрирования выражения входят эффективные свойства $\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\nu}$, из которых только два являются независимыми.

Критерий для определения эффективных свойств заключается в следующем: энергии, запасенные в композите и эквивалентной гомогенной среде, равны. В силу такого предположения определяется значение константы $D_4 = 0$. Этот результат дает возможность приравнять нулю выражение для D_4, полученное из решения системы уравнений (1.5)-(1.6), и свести тем самым задачу определения эффективного модуля сдвига $\widetilde{\mu}$ (остальные эффективные коэффициенты $\widetilde{\lambda}, \widetilde{\nu}$, как устанавливается в процессе решения, сокращаются) к решению квадратного уравнения вида:

$$A\left(\widetilde{\mu}/\mu^+\right)^2 + 2B\left(\widetilde{\mu}/\mu^+\right) + C = 0, \tag{1.7}$$

где через A, B, C обозначены некоторые постоянные величины, зависящие от известных физических характеристик матрицы и вставок $\mu^-/\mu^+, \nu^-/\nu^+$ и объемной доли включений $c = (a/b)^3$.

2. Рассматривается композит с цилиндрическими включениями, волокна которого в поперечном сечении носят стохастический характер (рис. 1.3).

Среды такого типа обладают симметрией свойств в плоскости, перпендикулярной к направлению ориентации волокон, и называются трансверсально изотропными. Такие структуры имеют пять независимых эффективных характеристик: $\widetilde{E}_{11}$ – модуль упругости при одноосном нагружении (модуль Юнга); $\widetilde{\nu}_{12} = \widetilde{\nu}_{13}$ – коэффициенты Пуассона; $\widetilde{K}_{23}$ – объемный модуль упругости при плоском деформированном состоянии; $\widetilde{\mu}_{12} = \widetilde{\mu}_{31}$, $\widetilde{\mu}_{23}$ – модули сдвига. Задача состоит в представлении в аналитическом виде пяти эффективных

 ISSN 1562-9945

констант через свойства компонентов композита (матрицы и включения) и их объемное содержание.

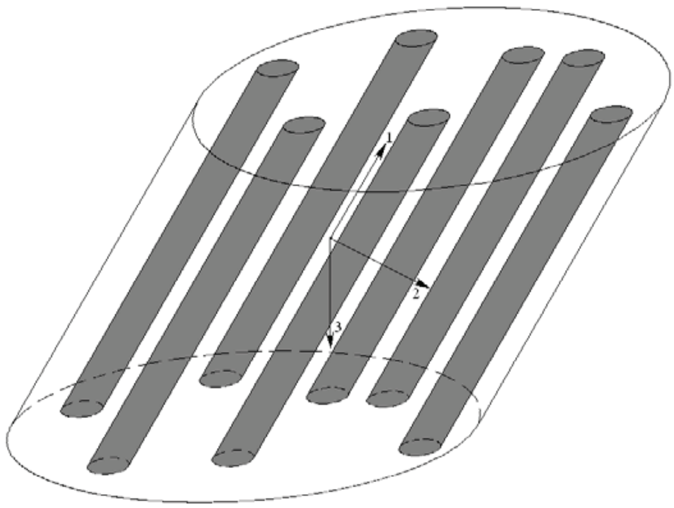

Рисунок 1.3 – Композит со стохастическими в сечении цилиндрическими включениями

Для решения задачи вводится структурная модель композита, называемая полидисперсной, и описанная Хашином и Розеном [10]. Эта модель является двумерным аналогом трехмерной полидисперсной модели среды со сферическими включениями, рассмотренной выше. Предполагается, что волокна (область Ω^-) представляют собой бесконечно длинные круговые цилиндры, заключенные в непрерывную матрицу (область Ω^+). Модель схематически представлена на рис. 1.4.

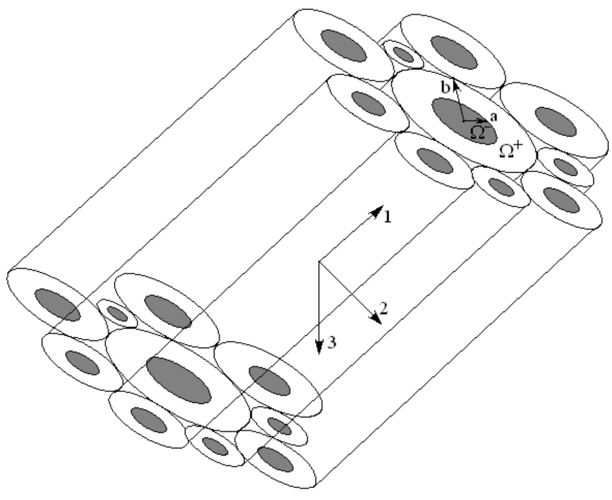

Рис. 1.4 – Полидисперсная модель композита с цилиндрическими включениями

Согласно этой модели, с каждым отдельным волокном радиуса a связана оболочка из материала матрицы радиуса b. Каждая отдельная комбинация волокна и матрицы называется составным цилиндром. Абсолютные значения радиусов a и b цилиндров различны, что создает конфигурацию, целиком заполненная этими цилиндрами. Отношение радиусов цилиндров a/b должно тем не менее оставаться постоянным. Естественно, абсолютный размер отдельных цилиндров при этом меняется вплоть до бесконечно малого. Практическое значение полидисперсной модели состоит в том, что с ее помощью определяются четыре из пяти эффективных характеристик представительного элемента объема – $\tilde{E}_{11}$, $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{K}_{23}$, $\tilde{\mu}_{12}$; при этом достаточно рассматривать лишь отдельный составной цилиндр.

Однако полидисперсная модель не дает возможности определить пятый эффективный модуль трансверсально изотропной среды – модуль сдвига в плоскости изотропии $\tilde{\mu}_{23}$. Поэтому вводится трехфазная модель композитной структуры, позволяющая найти точное решение для модуля сдвига $\tilde{\mu}_{23}$.

Аналогично тому, как и в пространственном случае, все, кроме одного, составные цилиндры заменяются эквивалентной гомогенной средой (рис. 1.5).

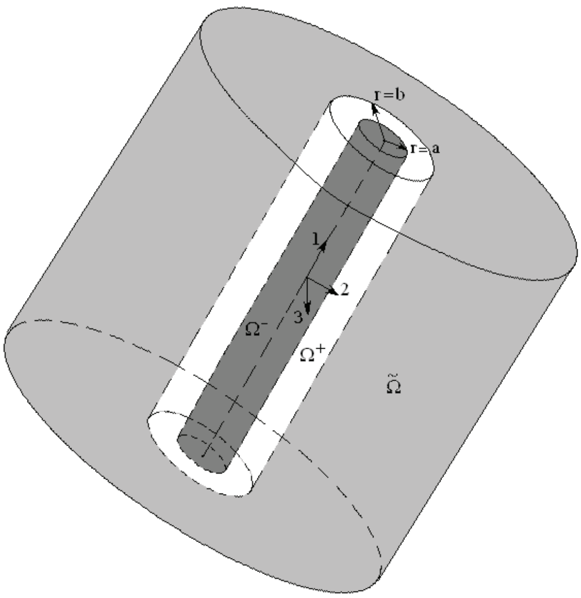

Рисунок 1.5 – Трехфазная модель композита с цилиндрическими включениями

 ISSN 1562-9945

Схема решения задачи с помощью трехфазной модели для композита с цилиндрическими включениями аналогична случаю структуры со сферическими включениями. Рассматривается представительный элемент объема, подверженный деформации сдвига. В полярных координатах r, θ деформированное состояние в волокне (область Ω^-), матрице (область Ω^+) и эквивалентной гомогенной среде $\widetilde{\Omega}$ выражается соответственно в виде:

$$u_r^- = \frac{b}{4\mu^-}\left[\left(\eta^- - 3\right)\frac{r^3}{b^3}A_1 + \frac{r}{b}A_2\right]\cos 2\theta;\; u_\theta^- = \frac{b}{4\mu^-}\left[\left(\eta^- + 3\right)\frac{r^3}{b^3}A_1 - \frac{r}{b}A_2\right]\sin 2\theta \text{;} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} u_r^+ &= \frac{b}{4\mu^+}\left[\left(\eta^+ - 3\right)\frac{r^3}{b^3}B_1 + \frac{r}{b}B_2 + \left(\eta^+ + 1\right)\frac{b}{r}B_3 + \frac{b^3}{r^3}B_4\right]\cos 2\theta \\ u_\theta^+ &= \frac{b}{4\mu^+}\left[\left(\mu^+ + 3\right)\frac{r^3}{b^3}B_1 - \frac{r}{b}B_2 - \left(\mu^+ - 1\right)\frac{b}{r}B_3 + \frac{b^3}{r^3}B_4\right]\sin 2\theta \end{aligned};\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_r &= \frac{b}{4\widetilde{\mu}_{23}}\left[\frac{2r}{b} + \left(\widetilde{\eta} - 1\right)\frac{b}{r}D_1 + \frac{b^3}{r^3}D_2\right]\cos 2\theta \\ \widetilde{u}_\theta &= \frac{b}{4\widetilde{\mu}_{23}}\left[-\frac{2r}{b} - \left(\widetilde{\eta} - 1\right)\frac{b}{r}D_1 + \frac{b^3}{r^3}D_2\right]\cos 2\theta \end{aligned},\quad (1.10)$$

где

$$\eta^{\pm} = 3 - 4\nu^{\pm};\; \widetilde{\eta} = 3 - 4\widetilde{\nu}_{23}. \quad (1.11)$$

Легко показать, что соотношения (1.8)-(1.10) удовлетворяют уравнениям равновесия. При $r \to \infty$ соотношения (1.10) описывают заданное состояние чистого сдвига. Модуль $\widetilde{\mu}_{23}$ и коэффициент Пуассона $\widetilde{\nu}_{23}$ являются неизвестными эффективными константами эквивалентной гомогенной среды.

Восемь неизвестных констант $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4, D_1, D_2$ определяются из условий неразрывности перемещений и напряжений $u_r, u_\theta, \sigma_r, \sigma_{r\theta}$ на границах раздела фаз $r = a,\ r = b$. Эти условия приводят к системе восьми независимых уравнений.

Принятый критерий определения эффективных свойств требует равенства энергий деформирования гетерогенной среды и эквивалентной гомогенной среды. Использование этого условия позволяет найти, что константа D_1 обращается в ноль. Соотношение, полученное приравниванием нулю выражения для D_1, преобразуется к квадратному уравнению

$$A\left(\widetilde{\mu}_{23}/\mu^+\right)^2 + 2B\left(\widetilde{\mu}_{23}/\mu^+\right) + C = 0, \quad (1.12)$$

из которого и определяется модуль сдвига в плоскости изотропии $\tilde{\mu}_{23}$ для модели композита, представленной на рис. 1.4; при этом, в выражения для констант A, B, C входят величины, характеризующие физические параметры структуры и объемные доли компонент $c = (a/b)^2$. Важно отметить, что выражение $\tilde{\mu}_{23}$ (1.12) не зависит от других эффективных констант, несмотря на то, что $\tilde{\nu}_{23}$ входит в исходные уравнения задачи (1.10), (1.11).

Таким образом, анализируя приведенные решения, заключаем, что наибольшие трудности возникают именно при определении эффективного модуля сдвига композита в плоскости изотропии, и именно при нахождении этого параметра целесообразно использование трехфазной модели, позволяющей получить точное аналитическое решение задачи.

Отметим при этом, что с математической точки зрения рассмотренная задача об определении эффективного модуля сдвига идентична задаче о теплопроводности композитного массива [6]. В этой связи представляется целесообразным использование трехфазной модели для исследования теплопроводности композитного массива с периодически расположенными цилиндрическими включениями. Предлагаемый далее подход основан на сочетании трехфазной модели композитной среды с теорией осреднения.

Получено 06.04.2007 г.

 ISSN 1562-9945