УДК 539.3

Д.Г. Зеленцов, М.В. Мельникова

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ КОРРОДИРУЮЩИХ ПЛАСТИН

Введение. В процессе эксплуатации оборудования и металлоконструкций используемых, в частности в химической промышленности, наблюдается заметное ухудшение их рабочих характеристик в результате коррозионного износа. Это проявляется в виде уменьшения геометрических размеров конструктивных элементов, снижении несущей способности конструкций и преждевременном выходе их из строя. Одной из мер повышения долговечности является завышение геометрических размеров проектируемых конструкций на величину, компенсирующую коррозионный износ. В полной мере обеспечить необходимую долговечность при минимизации материалоемкости конструкции можно лишь путем решения задачи оптимального проектирования.

Исходя из постановки оптимизационной задачи, конструкция должна сохранять несущую способность, то есть удовлетворять условиям прочности, жесткости, устойчивости в течение заданного промежутка времени. При этом время работы конструкции может быть как заданной величиной, так и варьируемым параметром. Как следует из анализа работ, посвященных проблеме оптимизации корродирующих конструкций, приведенных в обзоре [1], данная проблема до конца не решена. Это объясняется, в том числе, отсутствием надежных и достоверных алгоритмов вычисления функций ограничений.

Постановка задачи. Рассмотрим наиболее общий случай коррозионного взаимодействия, когда скорость коррозии является функцией напряжений. Это обусловливает появление обратной связи в моделях оптимизации. На рис.1 приведена общая блок-схема такой модели. Приняты следующие обозначения: A – модуль вычисления функций ограничений; B – модуль, учитывающий влияние агрессивной среды; C – модуль вычисления целевой функци; D – модуль, реализующий выбранный метод математического программирования; U, V, W – погрешности решения задачи напряженно-деформированного состояния (НДС), системы дифференциальных уравнений (СДУ) и задачи нелинейного математического программирования (НЛП).

Существующие подходы к решению задач основанны на совместном использовании численных методов решения СДУ, описывающий коррозионный процесс в элементах конструкции, методов решения задачи НДС, например, метода конечных элементов (МКЭ) [2, 3] и методов решения задачи НЛП. В качестве последних в общем случае могут использоваться только поисковые методы, так как функции ограничения не являются дифференцируемыми на всем пространстве поиска оптимального решения. Такие подходы позволяют получить некоторый результат, принимаемый за решение задачи долговечности. Не останавливаясь на анализе их эффективности, которая, очевидно, весьма невысока, отметим, что основным недостатком существующих методик является непредсказуемость погрешности решения оптимизационных задач такого класса.

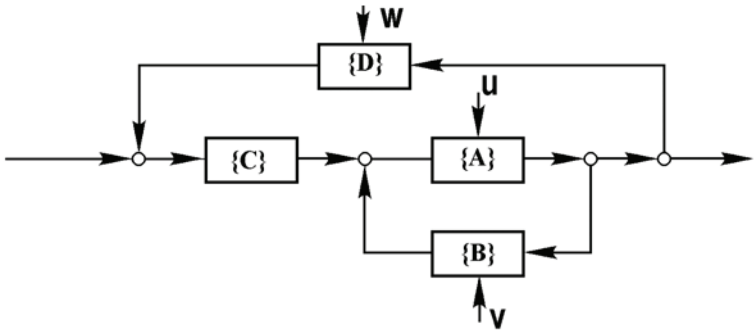

Рисунок 1

Очевидно, точность решения зависит, прежде всего, от погрешности вычисления функций ограничений. Эта погрешность должна находиться в разумных границах в процессе решения оптимизационной задачи и не зависеть от того или иного набора варьируемых параметров. Иными словами, алгоритм вычисления функций ограничений должен быть устойчивым по входным данным и обеспечивать получение достоверного решения.

Существующие алгоритмы, использующие методы типа Рунге-Кутта, не удовлетворяют этим требованиям: они не обеспечивают получение достоверного результата и не устойчивы по входным данным. Более того, невозможность изменения параметров

 ISSN 1562-9945

численных алгоритмов решения СДУ в процессе решения задачи оптимизации снижает их надежность и эффективность.

Становится очевидным, что для успешного и эффективного решения задачи оптимального проектирования корродирующих конструкций требуется существенная адаптация численных методов решения СДУ при вычислении функций ограничений.

Анализ алгоритмов вычисления. Размерность системы дифференциальных уравнений равна (или превосходит) числу конечных элементов в конечно-элементной модели конструкции. Для модели коррозионного износа, предложенной в [4] она имеет вид:

$$\frac{dH}{dt} = -v_0\left[1 + k\sigma(H,t)\right];\ H\big|_{t=0} = H_0\ , \qquad (1)$$

где H – вектор изменяющихся толщин элементов конструкции размерности N; v_0 – скорость коррозии при отсутствии напряжений; σ – некоторое эквивалентное напряжение; k – коэффициент влияния напряжения; t – время; N – количество элементов в конечно-элементной модели конструкции.

Решая (1) численно, можно определить геометрические характеристики любого КЭ в произвольный момент времени:

$$H_{ik}^{j} = H_{ik}^{j-1} - \Delta t^{j}\, v_0\left[1 + k\sigma_i\left(H^{j-1}, t^{j-1}\right)\right];\ i = \overline{1,N}\ , \qquad (2)$$

j – номер шага по времени.

Значение вектора H на данном шаге определяется по его значению на предыдущем. При этом в каждом узле временной сетки решается задача МКЭ. Для обеспечения получения результата с приемлемой точностью шаг по времени Δt приходится принимать достаточно малым. Это приводит к тому, что число итераций (следовательно, и число обращений к процедуре МКЭ) при вычислении функий ограничений может достигать нескольких десятков, а в некоторых случаях и сотен. Применение более эффективных численных методов решения задачи Коши позволяет несколько сократить число итераций, но в целом ситуации не меняет. Эффективность такого алгоритма оказывается невысокой.

При решении оптимизационных задач возникает проблема выбора рационального шага по времени. Геометрические параметры элементов, которые, как правило, являются варьируемыми параметрами, изменяются в процессе решения задачи в заданных границах. Величина шага по времени, достаточная для обеспечения заданной точности для одного набора варьируемых параметров, может оказаться недостаточной для другого. В связи с этим приходится либо идти на усложнение алгоритма решения задачи, вводя в него дополнительные программные модули, позволяющие прогнозировать величину шага по времени для данного набора варьируемых параметров, либо использовать очень малый шаг, обеспечивающий высокую вероятность необходимой точности решения для всех возможных наборов варьируемых параметров. Последнее, в свою очередь, приводит к очень большому числу обращений к процедуре МКЭ и приводит к непредсказуемой погрешности решения задачи, обусловленной накоплением погрешности вычислений [5].

Как следует из вышеизложенного, алгоритм решения СДУ должен отвечать требованиям:

- надежности (исключать возможность аварийного завершения работы программы вследствие системных ошибок);

- достоверности (обеспечивать получение результата, который будет являться решением задачи);

- устойчивости по входным данным (погрешность решения задачи не должна зависеть от конкретных значений варьируемых параметров);

эффективности.

Ниже будут рассмотрены ситуации, когда методы типа Рунге-Кутта не удовлетворяют данным требованиям.

В ситуациях, когда решение задачи становится неустойчивым, при использовании методов типа Рунге-Кутта, возможно возникновение аварийного завершения работы программы вследствие системных ошибок. Обеспечение надежности методов численного алгоритма возможно, только за счет введения в алгоритм дополнительных логических блоков, которые, тем не менее, не исключают возможности появления таких ошибок.

Долговечность конструкции определяется моментом времени, когда напряжения (или перемещение) в каком-либо элементе достигнут своих предельных значений. Элемент, в котором в данный момент времени напряжения наибольшие, в дальнейшем будем называть ведущим элементом. Методы типа Рунге-Кутта плохо работают в ситуациях, когда происходит смена ведущего элемента, то

 ISSN 1562-9945

есть, игнорирование смены ведущего элемента, очевидно, приведет к серьезному искажению решения задачи. Гарантировать достоверность решения задачи долговечности при использовании методов типа Рунге-Кутта, без серьезного усложнения логики алгоритма невозможно.

При решении оптимизационной задачи заранее известно, какая комбинация варьируемых параметров будет реализована на данном шаге поиска оптимального проекта. Величина шага интегрирования системы дифференциальных уравнений является параметром, который не изменяется во время работы программы. Следовательно, число итераций при постоянном значении заданной долговечности также будет постоянным. В этом случае погрешность численного решения будет существенно зависеть от того, какой именно набор варьируемых параметров реализуется на данном шаге задачи нелинейного программирования. Алгоритм, основанный на использовании методов типа Рунге-Кутта, при всех своих вышеперечисленных недостатках является еще и неустойчивым по входным данным.

Повысить эффективность в методах типа Рунге-Кутта можно с помощью использования неравномерной временной сетки. В этом случае представляется очевидным, что шаг по времени является убывающей функцией числа итераций. Вопрос о выборе вида функции остается открытым. При этом даже удачный выбор такой функции не гаранитирует результата из-за вышеперечисленных недостатков одношаговых методов.

Совершенно очевидно, что использование вычислительных алгоритмов, основанных на методах типа Рунге-Кутта в той их реализации, которая использовалась до настоящего времени, не только не позволяет получить решения задачи оптимального проектирования с заданной точностью, но и в ряде случаев не гарантирует получение достоверного результата.

Полуаналитический алгоритм решения СДУ. Ниже предлагается новый полуаналитический алгоритм решения систем дифференциальных уравнений в задачах оптимального проектирования корродирующих пластин, которые, на взгляд автора, лишены перечисленных недостатков.

Эффективность метода можно повысить за счет использования неравномерной временной сетки. Для этого предлагается использовать новый параметр интегрирования. Вместо шага по времени принимается шаг по напряжениям. Решение поставленной задачи возможно лишь при наличии зависимости, определяющей связь между шагом по напряжениям $\Delta\sigma$ и шагом по времени Δt. Такая зависимость предложена авторами и имеет вид [2]:

$$\Delta t = \frac{h_0 \cdot \sqrt{\sigma_0}}{2 \cdot v_0} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \sqrt{k}\left(arctg\sqrt{k\sigma_0} - arctg\sqrt{k\sigma} \right) \right] \qquad (3)$$

где σ_0 и σ – начальное и конечное эквивалентные напряжения; h_0 – толщина КЭ; Δt – время, за которое напряжения в КЭ изменяются от σ_0 до σ, то есть на величину $\Delta\sigma$.

Применение аналитической формулы позволяет упростить логику алгоритма.. Когда параметром интегрирования является время, требуется уточнение результата, например, методом парабол [2]. Это предполагает наличие информации о напряжениях в ведущем элементе в трех узлах временной сетки. При смене ведущего элемента требуется переопределение этих напряжений (рис. 2). Это требует существенного усложнения алгоритма, либо сохранения информации о напряжениях во всех КЭ. В полуаналитическом алгоритме уточнения решения не требуется, так как величина последнего шага по времени определяется из величины предельного напряжения, а процесс смены ведущего элемента осуществляется простой логической процедурой.

Надежность алгоритма обусловлена тем, что аргументом становится напряжение, а функцией – время, то неустойчивость решения в данном случае не наблюдается, а, следовательно, и аварийное завершение работы программы значительно менее вероятно.

К преимуществам предложенного алгоритма следует отнести и то, что он устойчив по входным данным.

 ISSN 1562-9945

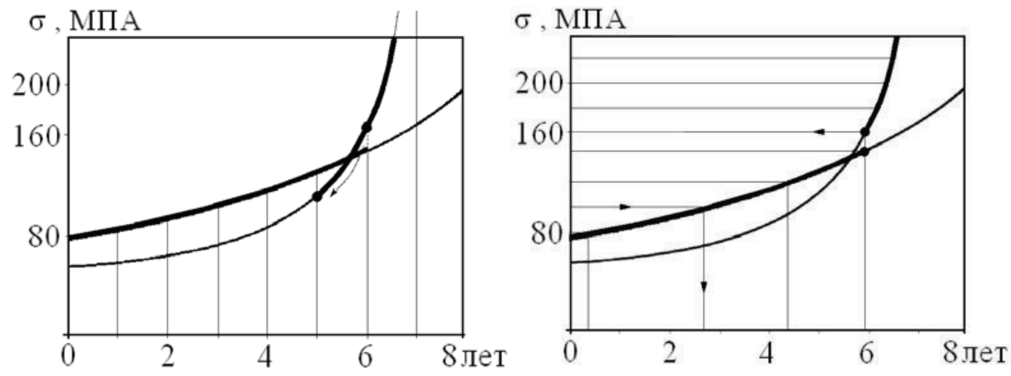

Рисунок 2

Численная иллюстрация. Для численной иллюстрации рассматривалась прямоугольная пластина, нагруженная в центре симметрии нагрузкой P = 40 кг (рис. 3). Геометрические параметры конструкции, характеристики металла и параметры коррозионного износа: a = 50 см; h = 0,75 см; E = 2,1×10^5 МПа; μ=0,3; $[\sigma]$=240 МПа; v_0 =0,25 см/год; k=0,003 МПа$^{-1}$. Асимптотически точное решение задачи долговечности t^*=1,082 года было получено путем последовательного уменьшения длины шага по времени при решении СДУ (1) методом Эйлера при Δt= 0,01 года, то есть, для этого потребовалось 109 итераций.

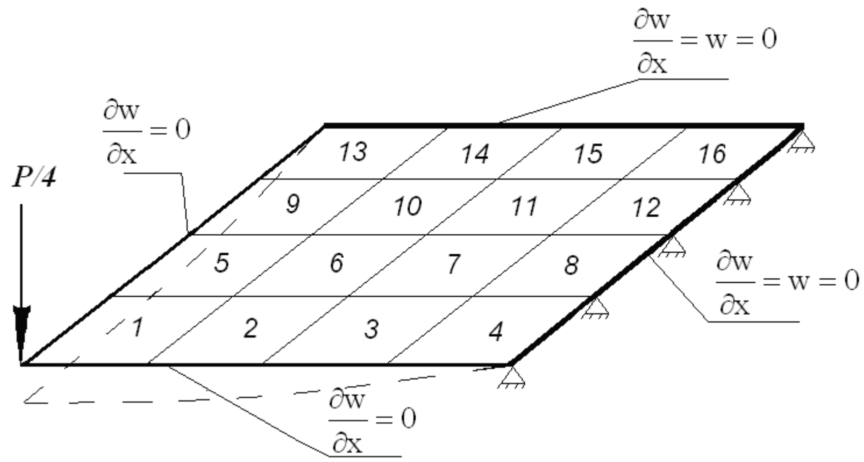

Рисунок 3

Долговечность конструкции определялась моментом времени, когда эквивалентные напряжения в КЭ (1) достигали предельного значения. Найденное решение считалось эталонным. Затем задача решалась при меньшем числе итераций. Некоторые результаты решения задачи представлены в таблице 1.

Результаты приведенные в таблице наглядно показывают, что с помощью метода Эйлера получить решение задачи не удалось. Так как алгоритм не предусматривал изменения знака толщины КЭ, то функция эквивалентных напряжений, начиная с некоторого момента времени стала убывающей (рис. 4). При этом полуаналитический алгоритм при 10 итерациях позволил получить решение с погрешностью менее 0,5 %.

Таблица 1

Долговечности конструкции при численном и полуаналитическом решениях

Метод Эйлера			Полуаналитический алгоритм		
Время, Лет	Толщина, см	Напряжения, МПа	Время, лет	Толщина, см	Напряжения, МПа
0,000	0,750	115,1	0,000	0,750	115,1
0,157	0,668	144,3	0,596	0,434	343,6
0,314	0,586	186,5	0,775	0,333	560,6
0,471	0,504	250,8	0,867	0,275	770,2
0,628	0,419	356,6	0,925	0,242	974,3
0,785	0,332	551,1	0,965	0,215	1175,3
0,942	0,241	980,2	0,996	0,194	1375,9
1,099	0,139	2154,4	1,021	0,177	1580,5
1,256	0,032	2384,4	1,042	0,161	1797,2
1,413	-0,122	2240,6	1,060	0,147	2045,1
1,570	-0,223	1094,3	1,080	0,131	2400,0

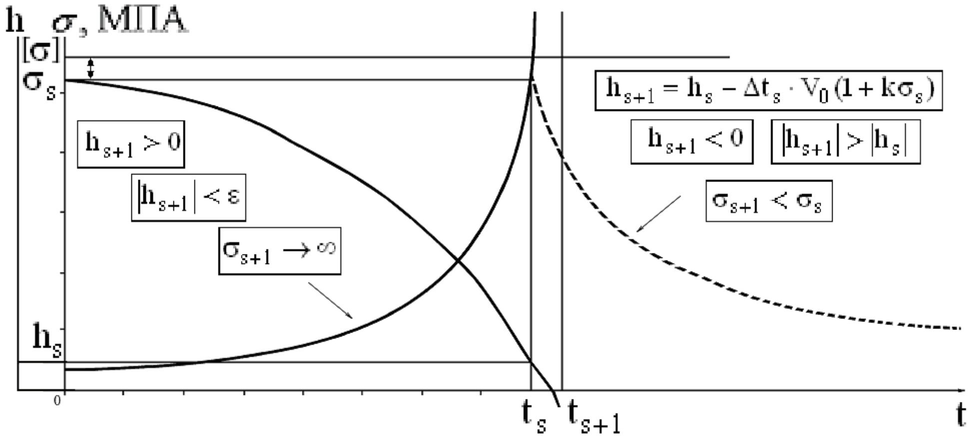

Рисунок 4

Вывод. Таким образом, изложенный алгоритм решения задачи долговечности пластины, подверженной коррозионному износу, обладает, по сравнению с известными, следующими преимуществами:

- применение аналитической формулы, определяющей зависимость времени эксплуатации конструкции от параметров коррозионного износа, позволяет существенно (в десятки раз) уменьшить число итераций при решении задачи долговечности, а, следовательно, и число обращений к процедуре МКЭ;

 ISSN 1562-9945

- при вычислении функций ограничений число итераций заранее известно и алгоритм не нуждается в процедуре уточнения значения долговечности;
- при наличии ограничений по жесткости алгоритм использует процедуру уточнения, но в этом случае число запоминаемых параметров состояния невелико и известно заранее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зеленцов Д.Г., Филатов Г.В. Обзор исследований по применению методов нелинейного математического программирования к оптимальному проектированию конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. // Вопросы химии и химической технологи. – 2002. – № 4. – С. 108 – 115.
2. Зеленцов Д.Г., Мельникова М.В. Численные алгоритмы в задаче изгиба корродирующей пластины. // Вопросы химии и химической технологии. – 2006, № 4 - С. 186-189.
3. Алексеенко Б.Г., Почтман Ю.М. О применении метода конечных элементов в расчетах прочности и долговечности стержневых систем, взаимодействующих с агрессивными средами. // Theoretical Foundation of Civil Engineering. – Warsaw, 1999. – P. 11 – 15.
4. Долинский В.М. Изгиб тонких пластин, подверженных коррозионному износу // Динамика и прочность машин, Харьков, 1975. – Вып. 21. – с. 16 – 19.
5. Колесник І.А., Зеленцов Д.Г., Храпач Ю.О. Про похибку скінченно-елементних процедур в задачах довговічності багатоелементних конструкцій, які підлягають корозійному зносу. // Опір матеріалів та теорія споруд. – 2002. – вип. 70. – С. 176 – 181.

Получено 04.05.2007 г.