

**ФОРМИ КОЛИВАНЬ НА ГРАНИЦЯХ ЗОН ПРОПУСКАННЯ
ОДНОМІРНИХ ХВИЛЬ В ДВОКОМПОНЕНТНИХ ШАРУВАТИХ
КОМПОЗИТАХ З МІЖФАЗНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ**

Фізико-механічні властивості, деформативність і міцність реальних композитних матеріалів залежить головними чином від властивостей матриці і наповнювача та якості границь розділу наповнювач-матриця [3]. В теоретичних дослідженнях безперечно перевага надається [4] ідеальній моделі, в якій композит розглядається як досконалий хімічний дисконтинуум і досконалий хімічний континуум. Відповідно до цієї концепції НДС компонент (фаз) описується співвідношеннями механіки деформування твердих тіл, а на поверхнях розділу виконуються умови досконалого механічного контакту $y_n^+ = y_n^-$, $u^+ = u^-$. Для моделювання міжфазних недосконалостей в тонкому міжфазному прошарку з неповністю визначеними фізико-механічними властивостями і підвищеною дефектністю вводиться [1, 2] гіпотетична міжфазна поверхня з контактними умовами $y_n^+ = y_n^-$, $u^+ = u^- + z_n \cdot y_n^-$. При вивченні поширення хвиль довільного частотного діапазону в шаруватих композитах використовується структурна (кусково-однорідна) модель при досконалому механічному міжфазному контакті. Основні результати цих досліджень висвітлені в монографії [4]. Деякі узагальнення досліджень про поширення хвиль в рамках структурної моделі при недосконалому механічному контакті викладаються в цій роботі.

Розглянемо двокомпонентний композит з міжфазними недосконалостями і дефектами, механічні властивості ортотропних компонент якого позначимо $c_{ij,1}$, ρ_1 для шарів товщиною h_1 і $c_{ij,2}$, ρ_2 для шарів товщиною h_2 . Координатні вісі x_i направимо вздовж головних напрямів ортотропії шарів. При поширенні хвиль впоперек структури шарів (вздовж осі x_3) переміщення, деформації і напруження залежать тільки від x_3 та часу і для них мають місце рівняння

$$\rho(x_3) \frac{\partial^2 u_{6-m}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{3,6-m}}{\partial x_3}, \quad \sigma_{3,6-m} = c_{mm}(x_3) \frac{\partial u_{6-m}}{\partial x_3}, \quad m = 3, 4, 5. \quad (1)$$

На міжфазних площинах $x_{3,2n-2+q}$ (n – ціле число, $q = 1, 2$) з недосконалим механічним контактом будемо вимагати виконання умов спряження

$$\begin{aligned} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0, t) &= \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0, t), \\ u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0, t) &= u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0, t) + \eta_{3,6-m} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Міжфазні параметри $\eta_{3,6-m}$ приймаються сталими і однаковими для всіх міжфазних площин.

Розв’язок рівнянь (1) для шарів $(n-1)h < x_3 < (n-1)h + h_1$ та $(n-1)h + h_1 < x_3 < nh$ відповідно вибираємо у вигляді

$$\begin{aligned} u_{6-m}(x_3, t) &= h \operatorname{Re} \left[A_{2n-1}^{(1)} \frac{\sin k_{mm,1}(x_3 - nh + h)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1}} + A_{2n-1}^{(2)} \cos k_{mm,1}(x_3 - nh + h) \right] e^{-i\omega t}, \\ u_{6-m}(x_3, t) &= h \operatorname{Re} \left[A_{2n}^{(1)} \frac{\sin k_{mm,2}(x_3 - nh + h_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2}} + A_{2n}^{(2)} \cos k_{mm,2}(x_3 - nh + h_2) \right] e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (3) і далі використовуються позначення $\rho_{00} \bar{\rho}_q = \rho_q$, $\bar{c}_{mm,q} c_{00} = c_{mm,q}$, $\bar{k}_{mm,q} = h_{00} k_{mm,q}$, $k_{mm,q} = \omega \sqrt{\rho_q / c_{mm,q}}$, $\bar{\eta}_{3,6-m} = \eta_{3,6-m} c_{00} / h$, де ρ_{00} , c_{00} , h – нормуючі параметри.

Тоді з умов спряження одержимо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{A}_{2n+1} = \mathbf{M}_{mm}(h_2) \mathbf{A}_{2n}, \quad \mathbf{A}_{2n} = \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{A}_{2n-1}. \quad (4)$$

Якщо її розв’язок шукати у вигляді

$$\mathbf{A}_{2n} = \chi_{mm}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{X}_{mm}, \quad \mathbf{A}_{2n-1} = \chi_{mm}^{n-1} \mathbf{X}_{mm}, \quad (5)$$

то для визначення скаляра χ_{mm} і вектора \mathbf{X}_{mm} одержимо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$\left(\mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) - \chi_{mm}^{-1} \mathbf{I}_2 \right) \mathbf{X}_{mm} = 0, \quad (6)$$

де $\mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1)$ – передаточна матриця для двох шарів.

З умови існування ненульових розв’язків системи (6) знаходимо характеристичне рівняння

$$\chi_{mm}^2 - 2b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) \chi_{mm} + 1 = 0. \quad (7)$$

Аналіз цього рівняння показує, що система (4) буде мати обмежений розв’язок при $n \rightarrow \pm\infty$ ($-\infty < x_3 < +\infty$), якщо коефіцієнт рівняння (7) задовольнятиме умову

$$-1 < b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) < +1, \quad (8)$$

яка і є умовою існування об’ємних хвиль.

Для ідентифікації експериментальних вимірювань важливо знати також просторові форми хвиль. Для частот, які обмежують зони пропускання хвиль, тобто при $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = \pm 1$, аналіз розв’язків системи (4) дозволяє установити просторові форми хвиль.

На межах $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = +1$ зон пропускання (8) відбуваються симетричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (SS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(2)} C_2(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(2)} C_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (9)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(2)}$, $\tilde{A}_2^{(2)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(2)} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) + \tilde{A}_2^{(2)} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(2)} \left(C_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) \right) - \tilde{A}_2^{(2)} \left(C_2(H_2) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

та антисиметричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (AA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(1)} S_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(1)} S_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (11)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(1)}$, $\tilde{A}_2^{(1)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(1)} C_1(H_1) - \tilde{A}_2^{(1)} C_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(1)} \left(S_1(H_1) + \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} C_1(H_1) \right) + \tilde{A}_2^{(1)} \left(S_2(H_2) + \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} C_2(H_2) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

На межах $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = -1$ зон пропускання (8) відбуваються симетричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (SA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(2)} C_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(1)} S_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (13)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(2)}$, $\tilde{A}_2^{(1)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(2)} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) + \tilde{A}_2^{(1)} C_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(2)} \left(C_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) \right) + \tilde{A}_2^{(1)} \left(\bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) + \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} C_2(H_2) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

та антисиметричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (AS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(1)} S_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(2)} C_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (15)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(2)}$, $\tilde{A}_2^{(1)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(1)} C_1(H_1) - \tilde{A}_2^{(2)} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(1)} \left(S_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} C_1(H_1) \right) - \tilde{A}_2^{(2)} \left(C_2(H_2) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В формулах (9)-(16) використовуються позначення $\bar{a}_{mm,q} = \bar{c}_{mm,q} \bar{k}_{mm,q}$, $S_q(x_3 - x_{3q}) = \bar{a}_{mm,q}^{-1} \sin k_{mm,q}(x_3 - x_{3q})$, $C_q(x_3 - x_{3q}) = \cos k_{mm,q}(x_3 - x_{3q})$, $x_{31} = H_1$, $x_{32} = h_1 + H_2$, $2H_q = h_q$.

При кількісному аналізі основна увага зверталася на вплив міжфазних параметрів $\eta_{3,6-m}$ на дисперсійні і амплітудні характеристики. Зі збільшенням $\eta_{3,6-m}$ зони пропускання звужуються і практично вироджуються в дискретний спектр власних частот товщинних коливань окремих шарів. Такі зони визначалися з частотних рівнянь граничних форм коливань. Шляхом чисельних розрахунків прослідкована перебудова форм об’ємних хвиль на границях зон пропускання.

Розглядався композит з механічними властивостями шарів $\bar{\rho}_1 = 1$, $\bar{c}_{33,1} = 13/3$, $\bar{c}_{44,1} = \bar{c}_{55,1} = 1$, $\bar{\rho}_2 = 2$, $\bar{c}_{33,2} = 70$, $\bar{c}_{44,2} = \bar{c}_{55,2} = 20$ при нормуючих параметрах $\rho_{00} = \rho_1$, $c_{00} = c_{44,1}$. Міжфазні сталі $\bar{\eta}_{33} = \bar{\eta}_{32} = \bar{\eta}_{31} = 0,5$. Товщини шарів приймалися рівними $h_1 = 0,3h$ і $h_2 = 0,7h$. На рис.1 наведені результати розрахунку форм поперечних (рис.1,а) та поздовжніх (рис.1,б) хвиль на граничних частотах зон пропускання на двох періодах структури. На рис.1,а показані форми поперечних хвиль, причому крива 2 відповідає верхній границі першої зони пропускання ($\omega_2 = 1,4731$, AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\omega_3 = 3,42205$, SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\omega_4 = 3,81221$, SS-коливання), крива 5 – нижній границі третьої зони пропускання ($\omega_5 = 11,524375$, AA-коливання), крива 6 – верхній границі третьої зони пропускання

($\omega_5 = 11,61749$, AS-коливання). На рис.1,б показані форми поздовжніх хвиль, причому крива 2 відповідає верхній границі першої зони пропускання ($\omega_2 = 1,6319$, AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\omega_3 = 3,5921$, SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\omega_4 = 3,97136$, SS-коливання). При побудові форм приймалося, що максимальна амплітуда коливань в першій зоні пропускання рівна одиниці. Зауважимо, що на нижній границі першої зони пропускання частота $\bar{\omega} = 0$, що відповідає поступальному руху жорсткого тіла, зміщення прийнято рівним нулеві і на рис.1 не показані.

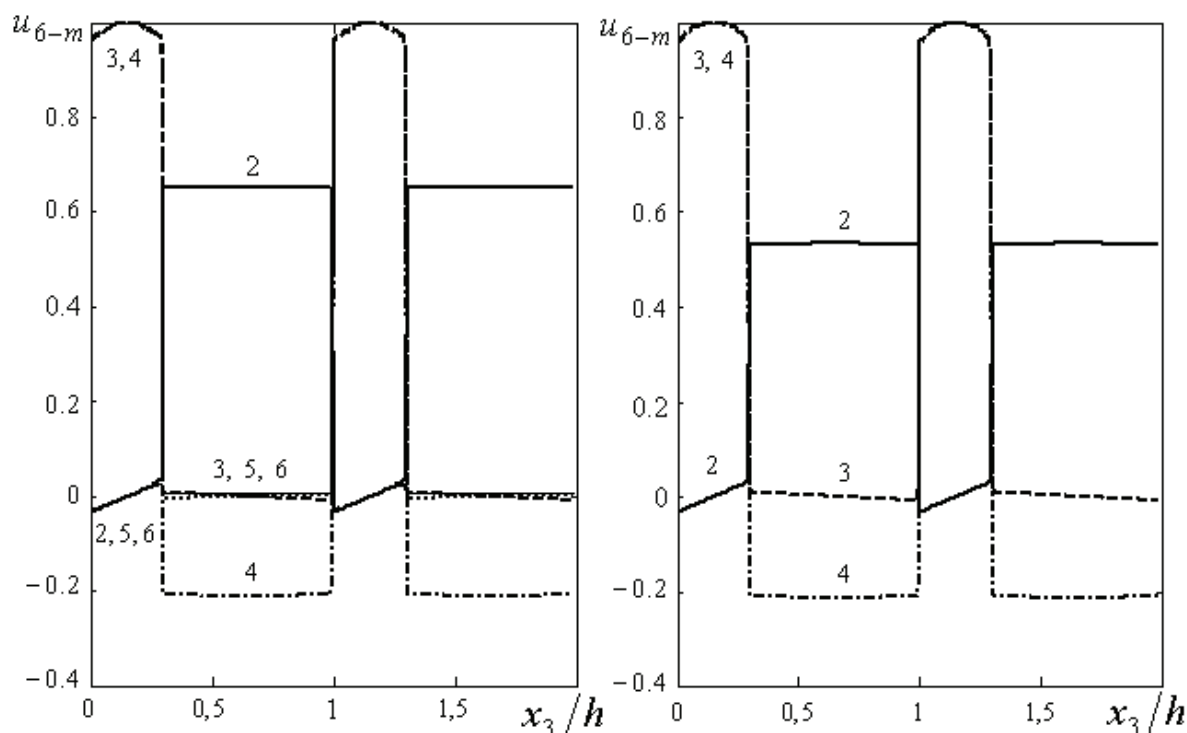


Рисунок 1

Різка зміна характеру форм на міжфазних прошарках (розриви першого роду на міжфазних площинах в прийнятій феноменологічній моделі) залежить від величин міжфазних параметрів $\bar{\eta}_{3,6-m}$ і зникає при $\bar{\eta}_{33} = \bar{\eta}_{32} = \bar{\eta}_{31} = 0$ (міжфазні недосконалості відсутні). Неперервні ділянки форм мають пологий характер в зв'язку з великим періодом відповідних тригонометричних функцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баженов В.А., Шульга Н.Д. Скорости распространения длинных волн в слоистых композитах с тонкими прослойками // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 55. – С. 6-10.

2. Баженов В.А., Шульга Н.Д. Распространение волн поперек структуры слоистого материала с межфазными прослойками // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1990. – Вып. 56. – С. 3-7.
3. Композиционные материалы. В 8-и т. Т.1. поверхности раздела в металлических композитах. – Москва: Мир, 1978. – 438 с. Т.6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – Москва: Мир, 1978. – 294 с.
4. Механика композитов. В 12 т. Т.2. Динамика и устойчивость материалов. – Киев: Наукова думка, 1993. – 431 с. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: ПТОО «А.С.К.», 1997. – 394 с.

Получено 15.06.2007 г.