М.О. Шульга

ДО ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ НЕОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ПЛАСТИН З ТОВЩИННОЮ ПОЛЯРИЗАЦІЄЮ

Важливість досліджень гармонічних коливань тонкостінних п'єзоелектричних тіл обумовлена поширеністю таких режимів функціонування перетворювачів енергії, застосуванням частотних методів визначення фізико-механічних властивостей матеріалів та ін. [1, 3].

Тонку п'єзокерамічну пластину товщиною h віднесемо до прямокутних декартових координат x, y, z, причому координатна площина $z = 0$ співпадає з серединною площиною пластини. При товщинній поляризації скористаємося матеріальними залежностями у формі [1, 3]

$$
\begin{gathered}
e_x = s_{11}^E \sigma_x + s_{12}^E \sigma_y + s_{13}^E \sigma_z + d_{13} E_z\,, \\
e_y = s_{12}^E \sigma_x + s_{11}^E \sigma_y + s_{13}^E \sigma_z + d_{13} E_z\,, \\
e_z = s_{13}^E \left(\sigma_x + \sigma_y\right) + s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z\,, \\
\gamma_{yx} = s_{66}^E \tau_{yx}\,,\ D_z = \varepsilon_{33}^T E_z + d_{13}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + d_{33}\sigma_z\,, \\
\gamma_{yz} = s_{55}^E \tau_{yz} + d_{15} E_y\,,\ D_y = \varepsilon_{11}^T E_y + d_{15}\tau_{yz}\,, \\
\gamma_{xz} = s_{55}^E \tau_{xz} + d_{15} E_x\,,\ D_x = \varepsilon_{11}^T E_x + d_{15}\tau_{xz}\,,
\end{gathered} \tag{1}
$$

причому $s_{66}^E = 2\left(s_{11}^E - s_{12}^E\right)$.

Якщо тонка п'єзокерамічна пластина з електродованими лицевими площинами знаходиться в умовах плоского напруженого стану, то, прийнявши гіпотези $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$, $E_z = E_z\left(x, y, t\right)$, із загальних матеріальних співвідношень (1) одержимо [1, 3] формули

$$
\begin{gathered}
\sigma_x = \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu^2)}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} - (1+\nu)\, d_{31} E_z\right), \\
\sigma_y = \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - (1+\nu)\, d_{31} E_z\right), \\
\tau_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu)\, s_{11}^E}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{gathered} \tag{2}
$$

Аналог коефіцієнту Пуассона $\nu = -s_{12}^E / s_{11}^E$.

З трьох рівнянь коливань при нехтуванні товщинним пришвидшенням залишаться тільки два

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{3}$$

З формул (2), (3) одержимо рівняння коливань в переміщеннях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)-(1+\nu)\,d_{31}\frac{\partial E_z}{\partial x}=(1-\nu^2)\,s_{11}^E\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)-(1+\nu)\;d_{31}\frac{\partial E_z}{\partial y}=(1-\nu^2)\;s_{11}^E\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{4}$$

При неелектродованих лицевих площинах пластини для п'єзокераміки, як сильного діелектрика, електричні граничні умови при $z=\pm h/2$ записуються [1, 3] у вигляді $D_z(x,y,z=\pm h/2,t)=0$. Оскільки пластина тонка, то можна прийняти $D_z=0$ по всьому об'єму пластини. Нехтуючи σ_z в порівнянні з σ_x, σ_y, визначивши з п'ятого рівняння (1) $E_z=-(\sigma_x+\sigma_y)d_{13}/\varepsilon_{33}^T$ і підставивши це значення E_z в перші два рівняння (1), одержимо

$$\sigma_x=\frac{1}{s_{11}^D(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_y=\frac{1}{s_{11}^D(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{xy}=\frac{1}{2(1+\nu)s_{11}^D}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{5}$$

В цих формулах використовуються матеріальні сталі

$$s_{11}^D=s_{11}^E-d_{31}^2/\varepsilon_{33}^T, \quad s_{12}^D=s_{12}^E-d_{31}^2/\varepsilon_{33}^T, \quad \nu=-s_{12}^D/s_{11}^D. \tag{6}$$

Підставляючи (5) в (3), одержимо рівняння коливань в переміщеннях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)=(1-\nu^2)\,s_{11}^D\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=(1-\nu^2)\,s_{11}^D\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{7}$$

які тільки доданком $(1+\nu)\,d_{31}\frac{\partial E_z}{\partial x}$, $(1+\nu)\;d_{31}\frac{\partial E_z}{\partial y}$ відрізняються від рівнянь (4).

Розв'язок систем (4) або (7) представимо [2] у вигляді

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v=\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{8}$$

 ISSN 1562-9945

У випадку електродованих площин $z = \pm h/2$ функції $\Phi(x, y, t)$, $\Psi(x, y, t)$ визначаються з хвильових рівнянь

$$\Delta\Phi - (1+\nu)\, d_{31} E_z = (1-\nu^2)\, s_{11}^D \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \Delta\Psi = 2(1+\nu)\, s_{11}^D \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \tag{9}$$

а у випадку неелектродованих площин $z = \pm h/2$ функції $\Phi(x, y, t)$, $\Psi(x, y, t)$ визначаються з хвильових рівнянь

$$\Delta\Phi = (1-\nu^2)\, s_{11}^D \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \Delta\Psi = 2(1+\nu)\, s_{11}^D \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \tag{10}$$

В рівняннях **(9)** і **(10)** оператор Δ є оператором Лапласа.

В полярних координатах $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ вирази **(8)** для переміщень будуть такими

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}. \tag{11}$$

Користуючись формулами [1, 3] для деформацій

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = r\frac{\partial}{\partial r}\frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} \tag{12}$$

і напружень

$$\sigma_r = \frac{1}{\left(1-\nu^2\right)\, s_{11}^E}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta\right) - \frac{d_{31}}{(1-\nu)\, s_{11}^E} E_z,$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{(1-\nu^2) s_{11}^E}\left(\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\theta\right) - \frac{d_{31}}{(1-\nu) s_{11}^E} E_z,$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2(1+\nu) s_{11}^E}\gamma_{r\theta}, \tag{13}$$

одержимо вирази для напружень через потенціали Φ, Ψ в полярних координатах

$$\sigma_r = \frac{1}{\left(1-\nu^2\right)\, s_{11}^E}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right) + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right)\right] - \frac{d_{31}}{(1-\nu)\, s_{11}^E} E_z,$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{(1-\nu^2) s_{11}^E}\left[\nu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right)\right] - \frac{d_{31}}{(1-\nu) s_{11}^E} E_z$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2(1+\nu) s_{11}^E}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right). \tag{14}$$

Розглянемо кругле п'єзокерамічне кільце радіусу R_1 з отвором радіусу R_0. Електродне покриття на лицевих площинах $z = \pm h/2$ розбите на $2N$ секторів з протифазними сусідніми підключеннями, так що $E_z = (-1)^{n-1} V_0/2h$, $n = 1, \ldots, 2N$. Розв'язок рівнянь **(9)** в полярних координатах r, θ, в першому з яких доданок $(1+\nu)\, d_{31} E_z$ треба брати рівним нулеві [3], при гармонічних коливаннях вибираємо у вигляді рядів

$$\Phi(r,\theta,t) = R^2 \operatorname{Re} \sum_m \{A_{m1} J_m(k_1 r) + A_{m2} N_m(k_1 r)\} \sin m\theta \exp(-i\omega t),$$

$$\Psi(r,\theta,t) = R^2 \operatorname{Re} \sum_m \{A_{m3} J_m(k_2 r) + A_{m4} N_m(k_2 r)\} \cos m\theta \exp(-i\omega t). \quad (15)$$

Тут $J_m(k_j r)$ та $N_m(k_j r)$ – циліндричні функції першого та другого роду, $k_1^2 = (1-\nu^2) s_{11}^E \rho\omega^2$, $k_2^2 = 2(1+\nu) s_{11}^E \rho\omega^2$, ω – циклічна частота коливань. З формул (15) і (14) знаходимо механічні напруження

$$\sigma_r(r,\theta,t) = \operatorname{Re}\left\{ \sum_m \left(a_{m1}(k_1 r) A_{m1} + a_{m2}(k_1 r) A_{m2} + a_{m3}(k_2 r) A_{m3} + a_{m4}(k_2 r) A_{m4}\right) \sin m\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{2V_0 d_{31}}{\pi(1-\nu) s_{11}^E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin N(2n+1)\theta}{2n+1} \right\} e^{-i\omega t},$$

$$\sigma_\theta(r,\theta,t) = \operatorname{Re}\left\{ \sum_m \left(b_{m1}(k_1 r) A_{m1} + b_{m2}(k_1 r) A_{m2} + b_{m3}(k_2 r) A_{m3} + b_{m4}(k_2 r) A_{m4}\right) \sin m\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{2V_0 d_{31}}{\pi(1-\nu) s_{11}^E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin N(2n+1)\theta}{2n+1} \right\} e^{-i\omega t},$$

$$\tau_{r\theta}(r,\theta,t) = \operatorname{Re} \sum_m \left(c_{m1}(k_1 r) A_{m1} + c_{m2}(k_1 r) A_{m2} + c_{m3}(k_2 r) A_{m3} + c_{m4}(k_2 r) A_{m4}\right) \cos m\theta \, e^{-i\omega t}. \quad (16)$$

Користуючись граничними умовами

$$\sigma_r(R_j,\theta,t) = 0, \; \tau_{r\theta}(R_j,\theta,t) = 0, \; j = 0,1, \quad (17)$$

одержимо блочні системи алгебраїчних рівнянь для визначення ненульових безрозмірних сталих $A_{N(2n+1).i}$, $n = 0,1,2,...$

$$\sum_{i=1,2} \left[a_{N(2n+1),i}(k_1 R_j) A_{N(2n+1).i} + a_{N(2n+1),i+2}(k_2 R_j) A_{N(2n+1).i+2}\right] + \frac{2V_0 d_{31}}{\pi(2n+1)(1-\nu) s_{11}^E} = 0,$$

$$\sum_{i=1,2} \left[c_{N(2n+1),i}(k_1 R_j) A_{N(2n+1).i} + c_{N(2n+1),i+2}(k_2 R_j) A_{N(2n+1).i+2}\right] = 0. \quad (18)$$

При резонансних коливаннях скористаємося концепцією комплексних модулів [3], внаслідок якої в формулах (13)-(16), (18) матеріальні сталі будуть комплексними величинами $\tilde{s}_{ij}^E = s_{ij}^E - i s_{ij}^{E\,\mathrm{Im}}$, $\tilde{d}_y = d_y - i d_{ij}^{\mathrm{Im}}$, $\tilde{\varepsilon}_{jj} = \varepsilon_{jj} - i\varepsilon_{ij}^{\mathrm{Im}}$. При визначенні частот вільних коливань з визначника четвертого порядку однорідної (при $V_0 = 0$) системи алгебраїчних рівнянь (18) тангенсами малих кутів втрат можна знехтувати.

ЛІТЕРАТУРА

1. Механика связанных полей в элементах конструкций. В. 5т. (под общ. ред. А.Н. Гузя). Т.5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.

 ISSN 1562-9945

2. Шульга Н.А. О волновых потенциалах электроупругости для пьезокерамических материалов // Теорет. и приклад. механика. – 1984. – Вып. 15. – С. 73-76.
3. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.

Получено 15.06.2007 г.