УДК 539.3

В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Э.А. Штанцель

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ БАЛОК В РАМКАХ ПРИКЛАДНЫХ ТЕОРИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

Неоднородные по толщине балки являются распространенными конструктивными элементами в несущих конструкциях. Существует ряд подходов построения математических моделей неоднородных по толщине балок (в даном случае трехслойных балок). Среди них основное место занимают теории, которые построены на использовании единых гипотез для всего пакета слоев в целом. Такой подход правомочен в случае незначительной разницы физико – механических параметров слоев. При значительном отличии физико – механических параметров более целесообразно принять теорию балок с использованием независимых гипотез к каждому из слоев. Численный анализ динамического поведения трехслойных балок с применением указанных теорий показывает, что в ряде случаев наблюдается значительное различие параметров напряженно – деформированного состояния по различным теориям. Этот факт вызывает необходимость проведения детального исследования напряженно – деформированного состояния трехслойных балок, проведения сравнительного анализа параметров напряженно–деформированного состояния и оценки достоверности полученных результатов.

В данной работе проводится численный анализ напряженно–деформированного состояния трехслойных балок согласно теории применения единых гипотез ко всему пакету слоев в рамках классической модели, модели с учетом деформаций поперечного сдвига и инерции вращения нормального элемента (балка Тимошенко) и модели трехслойных балок с применением гипотез к каждому слою при нестационарных нагрузках. В частном случае, исходя из полученных результатов, проводится косвенное сравнение с известными аналитическими и экспериментальными данными.

§1. Модель трехслойных балок с применением гипотез к каждому слою Трехслойная балка состоит из внешних ортотропных

слоев (обшивка) и внутреннего изотропного слоя (заполнитель). Все слои балки имеют постоянную толщину h_k $(k=\overline{1,3})$ и деформируются без проскальзывания и отрыва. Балка отнесена к ортогональной системе координат x, y, z, в которой срединные поверхности слоев являются координатными поверхностями $z = \text{const}$. Балка изгибается в плоскости xz. Кроме того, для каждого слоя вводятся локальные системы координат, которые являются следствием параллельного переноса указанной системы вдоль оси z.

При выводе уравнений динамического деформирования трехслойной балки будем исходить из положений, которые аналогичны при построении теории трехслойных оболочек [6].

В качестве независимых искомых функций принимаем компоненты вектора перемещения на поверхностях слоев $\overline{U} = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x), w_1(x), w_3(x))^T$.

Для вывода уравнений колебаний вариационный принцип Рейсснера для динамических процессов, согласно которому

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(R-T) - \delta A] dt = 0, \tag{1.1}$$

где A – работа внешних сил, R – функционал Рейсснера, T – кинетическая энергия упругой структуры.

Из вариационного уравнения (1.6) следуют уравнения колебаний трехслойной балки относительно независимых функций перемещений на поверхности слоев $u_1, u_2, u_3, u_4, w_1, w_3$

$$L_{3m+1}(\overline{U}) = \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{u_{2m+1}+u_{2m+2}}{2}\right) + \tag{1.2}$$

$$+(-1)^{m+1} \frac{\rho_{2m+1} h^2_{2m+1}}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{u_{2m+2}-u_{2m+1}}{h_{2m+1}}\right) \qquad (m=0;\ 1)\ ;$$

$$L_{m+2}(\overline{U}) = \frac{\rho_{m+1} h_{m+1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{u_m+u_{m+1}}{2}\right) + (-1)^m \frac{\rho_m h_m^2}{12} \times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{u_{m+1}-u_m}{h_m}\right) + (-1)^{m+1} \frac{\rho_{m+1} h_{m+1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{u_{m+2}+u_{m+1}}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\rho_{m+1} h^2_{m+1}}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{u_{m+2}-u_{m+1}}{h_{m+1}}\right) \qquad (m=1;\ 2)\ ;$$

 ISSN 1562-9945

$$L_{m+5}(\bar{U}) = \rho_{2m+1} h_{2m+1} \frac{\partial^2 w_{2m+1}}{\partial t^2} + \frac{\rho_2 h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{w_1 + w_3}{2}\right) +$$

$$+ (-1)^{m+1} \frac{\rho_2 h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{w_3 - w_1}{h_2}\right) \quad (m = 0;1),$$

где операторы $L_m(\bar{U})$, $m = \overline{1,\ 6}$ имеют следующий вид:

$$L_{3m+1}(\bar{U}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(T_{11}^{2m+1})\right] - (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(M_{11}^{2m+1})\right] +$$

$$+(-1)^m \frac{1}{h_{2m+1}} T_{13}^{2m+1}, \quad (m = 0;\ 1);$$

$$L_{m+1}(\bar{U}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(T_{11}^{m}) + \frac{\partial}{\partial x}(T_{11}^{m+1}) + \frac{1}{h_m}\left[\frac{\partial}{\partial x}(M_{11}^{m})\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{h_{m+1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(M_{11}^{m+1})\right] - \frac{1}{h_{m+1}} T_{13}^{m} + \frac{1}{h_{m+1}} T_{13}^{m+1}, \qquad (m = 1;2);\right.$$

$$L_{m+5}(\bar{U}) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{T}_{13}^{2m+1}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{T}_{13}^{2}) + (-1)^m \frac{1}{h_2} T_{33}^2, \qquad (m = 0;1);$$

$$\bar{T}_{13}^i = T_{13}^i + T_{11}^i \theta_1^i, \quad (i = \overline{1,3}).$$

Интегральные характеристики напряжений для каждого слоя задаются согласно формулам $(T_{11}^k,\ T_{13}^k,\ T_{33}^2) = \int\limits_z (\sigma_{11}^{kz},\ \sigma_{13}^{kz},\ \sigma_{33}^2) dz$;

$$M_{11}^k = \int\limits_z z^k \sigma_{11}^{kz} dz, \quad k = \overline{1,\ 3}; \quad z \in [-h/2,\ h/2].$$

Уравнения (1.2) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

§ 2. Численный метод решения задач. Численный алгоритм основывается на конечно – разностной аппроксимации уравнений колебаний. Используя явную схему «крест», компоненты обобщенного вектора перемещений аппроксимируем в целых точках разностной сетки, а компоненты обобщенного тензора деформаций и усилий в полуцелых точках сетки. Такой подход позволяет сохранить дивергентную форму разностного представления дифференциальных уравнений, а также и выполнение закона сохранения полной механической энергии на разностном уровне [6].

§ 3. Численные расчеты. Были проведены численные расчеты и сравнительный анализ результатов решения динамических задач нестационарного поведения трехслойных балок в рамках прикладных теорий – классической теории трехслойных балок, балок типа С.П. Тимошенко при принятии единых гипотез ко всему пакету в целом и теории с использованием независимых гипотез к каждому из слоев в широком диапазоне изменения физико–механических и геометрических параметров при разных видах граничных условий и типов нагружения.

Численные расчеты проводились при следующих геометрических параметрах $h_2/h_1 = 2 \div 9$; $\mathrm{h} = \mathrm{h}_1 + \mathrm{h}_2 + \mathrm{h}_3$; $R/h = 10 \div 30$; $L/R = 4$. Физико – механические параметры обшивок с толщинами h_1 і h_3 задавались следующими $E_1^1 = E_2^1 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $E_1^3 = E_1^1$; $\nu_1^1 = \nu_1^3 = 0,33$; $\rho_1 = \rho_3 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м^3. Физико – механические параметры заполнителя изменялись в пределах $\mathrm{E_{fil}} = \mathrm{E}_1^1/10 \div \mathrm{E}_1^1/1000$.

Нагрузка задавалась в виде $P_3(t) = A \cdot \sin\dfrac{\pi \cdot t}{T}[\eta(t) - \eta(t-T)]$, где T – время нагружения, A – амплитуда нагружения, $\eta(t)$ – функция Хевисайда.

Исходя из сравнительного анализа динамического поведения трехслойных балок можно сделать выводы, что при $\mathrm{E_1/E_{fil}} = 10$ величины напряженно–деформированного состояния практически не отличаются как по качественному характеру поведения, так и по количественному. В случае $\mathrm{E_1/E_{fil}} = 100$, картина распределения величин напряженно–деформированного состояния согласно приведенных теорий качественно начинает отличаться. Согласно теории с использованием гипотез к каждому слою, величинам прогибов $\mathrm{U_3}$ характерно более густое волнообразование по сравнению с теорией неоднородных по толщине балок. Разница по максимальным амплитудам прогибов при этом достигает порядка 5%. В случае $\mathrm{E_1/E_{fil}} = 500$ разница величин по максимальным амплитудам достигает порядка 10 – 15%. Увеличение соотношения $\mathrm{E_1/E_{fil}}$ приводит к значительному качественному расхождению величин напряженно – деформированного состояния (процесс волнообразования) и количественной разнице по максимальным величинам. Исходя из сравнительного анализа расчетов согласно теорий с использованием независимых гипотез к каждому слою,

 ISSN 1562-9945

классической теории балок и балок типа С.П. Тимошенко можно сделать вывод, что для всех задач, которые рассматривались для случая $E_1 / E_{fil} = 1000$ характерно, что различие по максимальным величинам прогибов в обшивках и заполнителе при заданных нестационарных нагружениях достигает порядка 15–30%, причем большие прогибы, а также более густое волнообразование наблюдается для теории с использованием независимых гипотез для каждого слоя. Как уже отмечалось, при уменьшении отношения величин E_1 / E_{fil} указанная разница уменьшается и при значении $E_1 / E_{fil} = 50$ соответствующие величины отличаются не более чем в 1,1–1,2 раза. Анализ величин деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ в срединной поверхности заполнителя показывает, что величина ε_{33} значительно превышает над соответствующей величиной ε_{11}.

§ 4. Сравнение с экспериментом. Значительное расхождение результатов расчетов согласно теориям с использованием независимых гипотез к каждому слою и классической теории балок и балок типа С.П. Тимошенко вызывает необходимость проведения тестовых расчетов. Исходя из этого было проведено косвенное сравнение численных результатов расчетов согласно указанных прикладных теорий трехслойных балок с известными экспериментальными и аналитическими данными решения соответствующих задач. Косвенный анализ проводился исходя из следующих предположений. Рассматривались известные аналитические решения задач и экспериментальные данные по теории трехслойных балок. При заданных геометрических и физико –механических параметрах проводились расчеты по динамическому поведению трехслойных балок согласно вышеуказанных волновых уравнений (теория балок с использованием независимых гипотез к каждому слою, классическая теория балок, теория балок типа С.П. Тимошенко) при действии внезапно приложенного распределенного нормального нагружения вида

$$P_3(x,t) = Af_1(x)f_2(t)$$

где A – амплитуда нагрузки; $f_2(t)$ – функция, которая отвечает за изменение нагружения во времени; $f_1(x)$ – функция, которая соответствует форме нагружения по пространственной координате x.

Полученные кинематические и силовые параметры сравнивались с данными решения соответствующих задач статики через динамический коэффициент $K_д$. В работе [4] приведены значения коэффициента динамичности для случая шарнирно–опертой балки при действии нагрузки $P_3(x,t)$ и вида функции $f_2(t)=(1-t/T)\cdot\eta(t-T)$, где T – длительность нагружения, $\eta(t)$ – функция Хевисайда. Согласно [4] показано, что при величине $\omega T \geq 100$, коэффициент динамичности $K_д$ = 2, где ω - круговая частота колебаний балки при заданной функции прогиба. При расчетах при действии внезапно приложенной нагрузки для случая $f(t)=\eta(t)$, как предельный случай, полагаем коэффициент динамичности $K_д$ = 2.

В табл. 1, 2 приведены результаты расчетов и сравнительный анализ согласно экспериментальных данных и теоретических расчетов согласно прикладных теорий трехслойных балок (как частный случай теории трехслойных оболочек с использованием независимых гипотез к каждому слою и теории неоднородных по толщине оболочек Кирхгофа – Лява и типа С.П. Тимошенко)

Таблица 1

Вариант расчетов	$U_3 \cdot 10^{-2}$,м	Δ,%
эксперимент	0,153	
аналитическое решения	0,160	4,68
теория согласно независимых гипотез	0,1432	6,4
теория типа Тимошенко	0,168	9,8
теория Кирхгофа – Лява	0,1155	24,5

Таблица 2

Вариант расчета	$U_3 \cdot 10^{-2}$,м	Δ,%
эксперимент	0,348	
аналитическое решение	0,363	4,13
теория согласно независимых гипотез	0,354	1,7
теория типа Тимошенко	0,1995	42,7
теория Кирхгофа – Лява	0,1902	45,3

 ISSN 1562-9945

Результаты табл. 1 соответствуют варианту расчетов шарнирно–опертой балки при действии распределенной нагрузки $P_3 = Af(x)\eta(t)$, где $f(x) = \sin(\pi x / L)$, где L – длина балки. Результаты эксперимента и аналитического решения приведены согласно работ [2,3]. Рассматривалась трехслойная балка с обшивками, изготовленными из материала типа сплав Д16-Т, и заполнителем типа пенопласт. Геометрические и физико –механические параметры балки полагались следующими: толщина обшивки $\delta_1 = 0,7 \cdot 10^{-3}$ м; заполнителя $\delta_2 = 0,37 \cdot 10^{-2}$ м; $E_{обш} = 7,03 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu = 0,33$; $E_{обш} / E_{зап} = 471$; $A = 0,0996 \cdot 10^5$ Па; $L = 0,28$ м.

В табл. 1 в первой строке приведены результаты согласно эксперимента [1] для значений прогиба U_3 на внешней поверхности балки при $x = L/2$. Вторая строка отвечает результатам аналитического решения [3]. Третья строка отвечает расчетам, которые представлены согласно теории независимых аппроксимаций. Четвертая строка–теории трехслойных балок типа Тимошенко (пакет), пятая – классической теории балок (пакет). Второй столбец в таблице отвечает относительной погрешности Δ, которая вычисляется по формуле

$$\Delta = \left| \frac{w_т - w_*}{w_т} \right| \cdot 100\%,$$

где w_m – значение согласно эксперимента, w_* – соответствующие значения согласно другим расчетам.

В табл. 2 приведено сравнение величин прогиба согласно эксперимента [1]. Рассматривался случай шарнирно опертой балки при нагружении $P_3 = Af(x)\eta(t)$. Геометрические и физико – механические параметры балки полагались следующими: $L/h = 10$; $\delta_1/\delta_2 = 0,5$; $h = 2\delta_1 + \delta_2$; $E_{обш} = 2,02 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_{обш} = 0,3$; $E_{зап} = 0,394 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_{зап} = 0,35$; $A = 5 \cdot 10^5$ Па. Обозначения величин в табл. 2 аналогичны обозначениям табл. 1. Как следует с приведенных результатов, расчеты согласно теории независимых аппроксимаций наиболее удовлетворительно согласуются с соответствующими экспериментальными и аналитическими решениями, что косвенно подтверждает достоверность полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Я., Брюкер Л.Э., Куршин и др. Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 271с.
2. Остерник Э.С. Экспериментальное исследование деформации нормали и способа осуществления краевых условий у слоистых пластин // Тр. VIII Всесоюз. конфер. по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973. – 797с.
3. Пикуль В.В. Общая техническая теория тонких упругих пластин и пологих оболочек. – М.: Наука, 1977. – 152 с.
4. Попов Н.Н., Расторгуев Б.С., Забегаев А.С. Расчет конструкций на динамические нагрузки. – М.: Высш. шк., 1992. – 319 с.
5. Шульга Н.А., Мейш В.Ф., Хамренко Ю.А. Нестационарные колебания трехслойных цилиндрических оболочек при осесимметричном нагружении // Прикл. механика. – 1999. – **35**, N 8. – С. 3–9.

Получено 15.06.2007 г.

ISSN 1562-9945