І.Ю.Хома, Ю.І.Хома

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ І ДЕФОРМАЦІЯМИ

Викладено спосіб побудови рівнянь рівноваги нетонких анізотропних оболонок з початковими напруженнями і деформаціями при усталеному температурному полі. В основу його покладено метод розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини. Відносно коефіцієнтів розкладу як функцій двох незалежних змінних варіаційним способом виводиться система диференціальних рівнянь і відповідні граничні умови.

Припустимо, що оболонка, яка займає область $\Omega = S \times [-h, h]$ тривимірного простору, віднесена до криволінійної системи координат x^i $(i = 1,2,3)$, нормально звя'заної з поверхнею S. При цьому будемо вважати, що x^α $(\alpha = 1,2)$ співпадають з гаусовими координатами поверхні S, а x^3 змінюється вздовж нормалі $\vec{n}$ до S в межах товщини оболонки, тобто $x^3 \in [-h, h]$. Нехай p^{ij} і v_j компоненти початкових напружень і переміщень оболонки, які визначаються розв'язком лінійної крайової задачі. Для побудови двовимірних рівнянь теорії оболонок скористаємося варіаційним рівнянням В.В.Болотіна [1], доповненого температурним членом

$$\iiint_{\Omega} t^{ij} \nabla_i \delta u_j \, d\Omega = 0 , \tag{1}$$

де

$$t^{ij} = \sigma^{ij} + c^{ilsm} \nabla_s u_m \nabla_l \mathrm{v}^j + p^{il} \nabla_l u^j , \tag{2}$$

причому

$$\sigma^{ij} = c^{ijlm} (\nabla_l u_m + \nabla_m \mathrm{v}^s \nabla_l u_s) - \beta^{ij} \theta , \tag{3}$$

і варіаційним рівнянням для стаціонарного температурного поля [2]

$$\iiint_{\Omega} q^i \partial_i (\delta\theta) \, d\Omega - \iint_{\partial\Omega} Q \delta\theta \, da = 0 , \tag{4}$$

в якому

$$q^i = -\lambda^{ij} \partial_j \theta . \tag{5}$$

Тут ∇_l - символ коваріантної похідної в S_g-параметризації області Ω [3]; $\partial_j = \partial / \partial x_j$; σ^{ij}, u_j - компоненти збуреного тензора напружень і

 ISSN 1562-9945

вектора переміщень, θ- приріст температури; q^i- вектор притоку тепла, Q - заданий приплив тепла на граничній поверхні; c^{ijlm}- тензор модулів пружності; $\beta^{ij} = c^{ijlm}\alpha_{lm}$, α_{lm}- коефіцієнти температурного лінійного розширення і зсуву; λ^{ij}- коефіцієнти теплопровідності.

Зобразимо компоненти вектора переміщень u_j і приросту температури θ у вигляді скінченного ряду Фур'є за поліномами Лежандра $P_k(\varsigma)$, тобто [4]

$$u_{j'}(x^1, x^2, x^3) = \sum_{k=0}^{N} u_{j'}^{(k)}(x)\, P_k(\varsigma)\, ; \theta(x^1, x^2, x^3) = \sum_{k=0}^{N} \theta^{(k)}(x) P_k(\varsigma)\, , \qquad (6)$$

де $x = (x^1, x^2)$, $\varsigma = h^{-1}x^3$; $u_{j'}^{(k)}(x)$, $\theta^{(k)}(x)$ - коефіцієнти розкладу, що іменуємо далі моментами. Враховуючи представлення (6) із варіаційного рівняння (1) після деяких перетворень отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\nabla_\alpha t_{(k)}^{\alpha\beta} - b_\alpha^\beta t_{(k)}^{\alpha 3} - (2k+1)h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]} t_{(k-2s-1)}^{3\beta} = 0 \quad (\beta = 1,2)\, ;$$

$$\nabla_\alpha t_{(k)}^{\alpha 3} + b_{\alpha\beta} t_{(k)}^{\alpha\beta} - (2k+1)h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]} t_{(k-2s-1)}^{33} = 0 \quad (k = 0,1,\ldots,N)\, ; \qquad (7)$$

і відповідні граничні умови $t_{(k)}^{\alpha i}\nu_\alpha = 0$, де ν_α- компоненти зовнішньої нормалі до границі ∂S; ∇_α - символ коваріантної похідної в базисі поверхні S; $K = (k-1)/2$, символ $[K]$ означає цілу частину числа K;

$$t_{(k)}^{ij'} = (k + \tfrac{1}{2}) \int_{-h}^{h} \vartheta(x^3) A_{r\cdot}^{\cdot j'} t^{ir} P_k(\varsigma) dx^3\, . \qquad (8)$$

Тут $A_{r\cdot}^{\cdot j'}$ - просторовий тензор другого рангу [3]; $\vartheta(x^3) = \det\left\| A_{r\cdot}^{\cdot j'} \right\|$.

Згідно (6) співвідношення (2), (3) приймуть вигляд

$$t^{ir} = \sigma^{ir} + \sum_{n=0}^{N} (A_{m\cdot}^{\cdot s'} c^{iqlm} \nabla_q \mathrm{v}^r + A^{rs'} p^{il})\, \varepsilon_{ls'}^{(k)} P_n(\varsigma)\, ;$$

$$\sigma^{ir} = \sum_{n=0}^{N} \Big[c^{irlm} (A_{m\cdot}^{\cdot s'} + A_{q\cdot}^{\cdot s'} \nabla_m \mathrm{v}^q) \varepsilon_{ls'}^{(n)} - \beta^{ir}\theta^{(n)} \Big] P_k(\varsigma)\, . \qquad (9)$$

Далі слід враховувати, що компоненти початкових напружень p^{ij} і переміщень v_j зображаються у вигляді рядів за поліномами Ленжандра, моменти яких визначаються при розв'язуванні відповідних граничних задач [5]. Після цього необхідно підставити (9) у формулу (8) і провести інтегрування по x^3.

Таким же способом із варіаційного рівняння (4) отримуємо систему рівнянь

$$\nabla_\alpha q^\alpha_{(k)} - (2k+1)h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]} q^3_{(k-2s-1)} + \Phi^{(k)} = 0 \quad (k = 0,1,\ldots,N), \qquad (10)$$

і відповідні їй граничні умови $q^\alpha_{(k)}\nu_\alpha = Q^{(k)}_{(\nu)}$,

де

$$\Phi^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\left[\vartheta(h)Q_3^+ - (-1)^k \vartheta(-h)Q_3^-\right]. \qquad (11)$$

До рівняння (10) приєднуються співвідношення між моментами теплових потоків і приросту температури, тобто

$$q^i_{(k)} = -\sum_{n=0}^{N}(k+\tfrac{1}{2})\int_{-h}^{h}\vartheta(x^3)\left(\lambda^{i\alpha}\partial_\alpha\theta^{(n)} + \lambda^{i3}h^{-1}\underline{\theta}^{(n)}\right)P_k(\varsigma)dx^3, \qquad (12)$$

де $\underline{\theta}^{(k)} = (2k+1)(\theta^{(k+1)} + \theta^{(k+3)} + \cdots)$, причому $\theta^{(n)} = 0$, якщо $n < N$.

Наведені рівняння є досить загальними. Вони значно спрощуються, якщо знехтувати зміною метрики по товщині оболонки, тобто коли геометрия оболонки така, що величиною $\left|k_\alpha x^3\right|$, де k_α $(\alpha = 1,2)$ головні кривизни поверхні S, можна знехтувати в порівнянні з одиницею.

ЛІТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. О вариационных принципах теории упругой устойчивости // Пробл.механики твердого деформируемого тела. – Л.Судостроение. 1970. – С.83-88.
2. Новацкий В. Электромагнитные волны в твердых телах. – М.Мир, 1986. – 159 с.
3. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теория ковариантов. – М. Наука. 1986. – 296 с.
4. Khoma I.Yu. Thermopiezoelectric Equations for Nonthin Ceramic Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – vol. 41, №2. – p. 118-128.
5. Хома И.Ю., Хома Ю.И. Учёт температурного поля в теории нетонких оболочек с начальными напряжениями // Вісник Донецького університету, Сер. А. Природничі науки. – 2006, №1. – С. 117-120.

Получено 15.06.2007 г.