

ЕЛЕКТРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ П’ЄЗОКЕРАМІЧНОГО ЦИЛІНДРА ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗБУРЕННЯХ

Постійно зростаюча область застосування п’єзокерамічних матеріалів зумовлює необхідність поглибленого вивчення динамічних задач електропружності [1,2,3 та ін.]. Найбільш складними та найменше дослідженими в цьому класі задач є задачі нестационарної динаміки для п’єзокерамічних тіл скінченних розмірів. Дана робота присвячена дослідженню поширення осесиметричних нестационарних коливань в порожнистому п’єзокерамічному циліндрі при збуренні електричним потенціалом.

Розглядається порожнистий радіально поляризований циліндр, перетин якого в циліндричній системі координат r, θ, z займає область $W = \{R - h \leq r \leq R + h, 0 \leq z \leq l_z\}$. В рамках лінійної теорії електропружності збурений стан п’єзоелектричного циліндра описується системою рівнянь

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= -\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_{rr}}{\partial r}; \quad \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_{rz}}{\partial r}; \\ \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

при матеріальних співвідношеннях радіально поляризованого тіла [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{13}^E \frac{u_r}{r} + c_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{33}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{11}^E \frac{u_r}{r} + c_{12}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \sigma_{zz} &= c_{12}^E \frac{u_r}{r} + c_{11}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \sigma_{rz} = c_{44}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + e_{42} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ D_r &= e_{13} \frac{u_r}{r} + e_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad D_z = e_{42} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Торець $z = 0$ циліндра жорстко закріплений, інші поверхні вільні від механічних навантажень. До електродованих поверхонь $r = R \pm h$ підводиться різниця потенціалів, а на торцях виконується умова відсутності вільних зарядів. Граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{rr}(R \pm h, z, t) = 0, \sigma_{zz}(r, l_z, t) = 0, \sigma_{rz}(R \pm h, z, t) = \sigma_{rz}(r, l_z, t) = 0, \quad (3)$$

$$u_r(r, 0, t) = u_z(r, 0, t) = 0, D_z(r, 0, t) = D_z(r, l_z, t) = 0, \varphi(R \pm h, z, t) = f_{\pm}(t).$$

Початкові умови приймемо нульовими:

$$u_r(r, z, 0) = u_z(r, z, 0) = 0; \dot{u}_z(r, z, 0) = \dot{u}_r(r, z, 0) = 0. \quad (4)$$

Розв’язок шукається в функціях u_r , u_z , φ , де u_r , u_z – радіальні та поздовжні переміщення, φ – електричний потенціал. Після підстановки (2) в (1), (3) задача зводиться до системи диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку при крайових (3) та початкових (4) умовах.

Для чисельного розв’язання задачі в області $D = \{-h \leq x \leq h, 0 \leq z \leq l_z, 0 < t \leq T\}$, де $x = r - R$, вводиться розбиття $\Omega = \{x_i, z_j, t_k\}$, що містить позаконтурні точки, необхідні для запису граничних умов.

Розв’язок шукаємо в вигляді набору значень переміщень та електричного потенціалу в точках розбиття:

$$u_{i,j}^{r,k} = u_r(x_i, z_j, t_k), u_{i,j}^{z,k} = u_z(x_i, z_j, t_k), \varphi_{i,j}^k = \varphi(x_i, z_j, t_k), \{x_i, z_j, t_k\} \in \Omega.$$

Систему рівнянь в частинних похідних зводимо до системи алгебраїчних рівнянь шляхом заміни похідних по просторовим координатам центрально-різницевиими виразами та похідних по часу різницевиими виразами неявної схеми Ньюмарка

$$\dot{u}_{ij}^{k+1} = \frac{\dot{u}_{ij}^{k+1} - \dot{u}_{ij}^k}{\xi \Delta t} - \frac{1 - \xi}{\xi} \ddot{u}_{ij}^k; \dot{u}_{ij}^{k+1} = \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\xi \Delta t} - \frac{1 - \xi}{\xi} \dot{u}_{ij}^k,$$

де ξ – параметр схеми. При обчисленнях використовувалося значення $\xi = 0.5$.

Виключивши значення невідомих в позаконтурних точках, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь $M \cdot U^{k+1} = F^{k+1}$, де $U^{k+1} = \{u_{i,j}^{r,k+1}, u_{i,j}^{z,k+1}, \varphi_{i,j}^{k+1}\}$ – вектор невідомих в внутрішніх точках розбиття в момент часу $t = t_{k+1}$, F^{k+1} – вільний вектор. Система розв’язується шляхом факторизації матриці на верхньотрикутну та нижньотрикутну з використанням перестановки.

Значення переміщень, їх швидкостей та прискорень в початковий момент часу $t = 0$ отримуємо з початкових умов (4) та рівнянь руху (1).

В якості модельних взято одновимірну електропружну задачу про поширення коливань в п’єзокерамічному шарі (розв’язок

побудовано методом Даламбера) та в нескінченному п'єзокерамічному циліндрі (розв'язана чисельно).

При розгляданні двовимірної задачі виявилось, що фронт хвилі поздовжніх переміщень рухається від торців подібно до пружних хвиль. До моменту приходу в точку хвилі поздовжніх переміщень механічні та електричні параметри не залежать від координати z і співпадають з розв'язком одномірної задачі.

Потрібно відмітити, що суттєва двовимірність задачі та зв'язаність механічних та електричних характеристик ускладнює аналіз впливу фізичних та геометричних параметрів постановки на рішення і є причиною скорочення інтервалу стійкості розв'язку в порівнянні з одновимірною або пружною задачею.

Обчислення проводилися для циліндра з кераміки PZT-4 [1] з геометричними характеристиками $l_z = 5h$, $h/R = 0.5$ при навантаженні електричним потенціалом

$$V(t) = \begin{cases} V_0(1 - \cos \omega t), & 0 < t < 2\pi/\omega, \\ 0, & t \leq 0, t \geq 2\pi/\omega. \end{cases}$$

При обезрозмірюванні, прийнятому в [1], $V_0 = 0.5$, $\omega = \pi$.

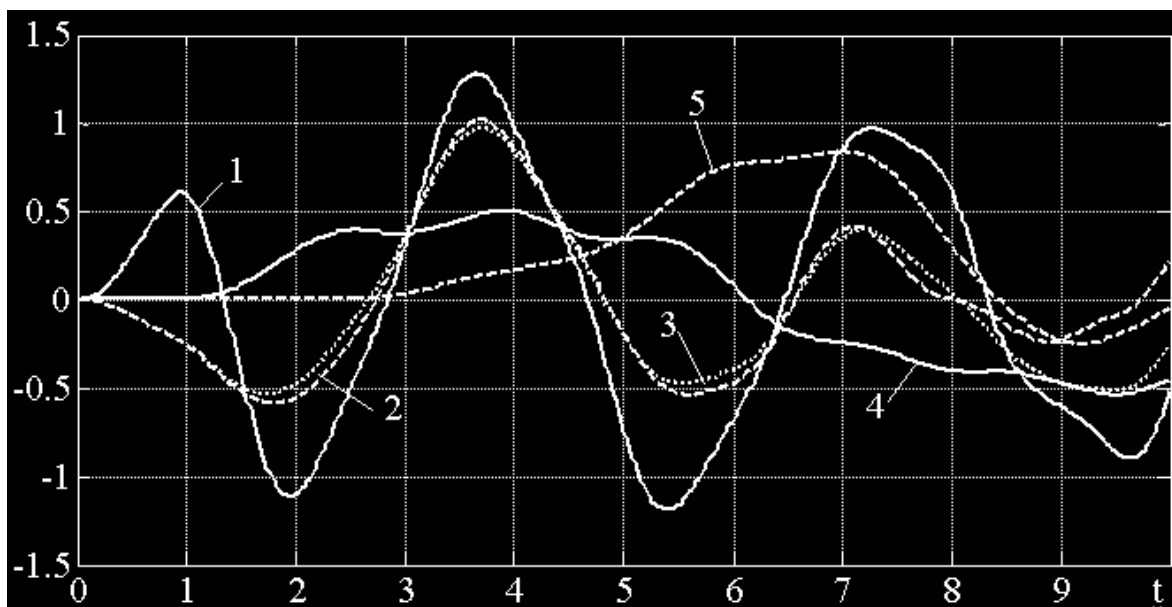


Рисунок 1

Малюнок ілюструє зміну основних механічних характеристик відносно безрозмірного часу в центральній точці перерізу: лінія 1 відповідає безрозмірним напруженням $\bar{\sigma}_{rr}$, 2 – $\bar{\sigma}_{zz}$, 3 – $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$, 4 – переміщення \bar{u}_r , 5 – \bar{u}_z . Бачимо, що напруження в перерізі циліндра

виникають миттєво, і до моменту приходу в цю точку переміщень з вільних поверхонь повністю визначаються електричним потенціалом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел.— К: Наук. думка, 1990.— 228 с.
2. Чебан В. Г., Форня Г. А. Численное исследование электроупругой задачи для прямоугольных тел // Численные методы решения задач волновой динамики. — Вып. 117. — Кишинев: Штиинца, 1990. —С. 122–131.
3. Мельник В. Н., Москальков М. Н. Разностные схемы и анализ приближенных решений для двумерных нестационарных задач связанной электроупругости // Дифф. уравнения.—1991.—27, №7. — С. 1220-1229.

Получено 15.06.2007 г.