УДК 517.5

А.Н. Давидчик

СПЛАЙНЫ К ПРИБЛИЖЕНИЮ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение. Рассматривается множество функций имеющих непрерывные частные производные на квадрате и их приближение сплайн-функциями.

Постановка задачи. Множество функций $f(x,y)$, имеющих непрерывные частные производные p-го порядка по x и по y на квадрате Q $(0 \le x,\ y \le 1)$, обозначим через C^p $(p = 0, 1, 2, \ldots;\ C^0 = C)$. Пусть далее $\Delta = \{[0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1]$

$[0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1]\}$ произвольное фиксированное разбиение квадрата Q

$$\Delta_1 = \max_i (x_i - x_{i-1}),\ \Delta_2 = \max_{j_1} (y_j - y_{j-1})\ \ (i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Каждой функции $f(x,y) \in C^1$ поставим в соответствие сплайн-функцию $S_{m,n}(f;\ x,\ y) \in C^2 (r = 1, 2, \ldots)$, однозначно определенную следующими требованиями: 1) на каждом прямоугольнике $Q_{k,\ i}$ $(x_{k-1}, x_k;\ y_{i-1}, y_i)$ функция

$S_{m,n}(f;\ x,\ y)$ – алгебраический многочлен $(2r+1)$-ой степени по x и y,

2) $S_{m,n}(f;\ x_k,\ y_i) = f(x_k,\ y_i)$;

3) $\dfrac{\partial S_{m,n}(f;\ x_k,\ y_i)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x_k,\ y_i)}{\partial x}$;

$$\frac{\partial S_{m,n}(f;\ x_k,\ y_i)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_k,\ y_i)}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^{\ell+j} S_{m,n}(f;\ x_k,\ y_i)}{\partial x^\ell \partial y^j} = 0; \quad \begin{array}{l} \ell,\ j = 0, 1, 2, \ldots, r; \\ \ell + j \ge 2. \end{array}$$

Если вместо требования 3) выполняется следующее условие

$$\frac{\partial^{\ell+j} S_{m,n}(f;\ x_k,\ y_i)}{\partial x^\ell \partial y^j} = 0; \quad \begin{array}{ll} \ell,\ j = 0, 1, 2, \ldots, r; & k = 0, 1, 2, \ldots, m; \\ \ell + j \ge 1, & i = 0, 1, 2, \ldots, n, \end{array}$$

то такой сплайн обозначим через $S^0_{m,n}(f;\, x,\, y)$.

Основное содержание. 1. Обозначим через $W^{1,1}H_\omega$ совокупность функций $f(x,\, y) \in C^1$, удовлетворяющих условиям

$$\left|\frac{\partial f(x_1,\, y_1)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_2,\, y_2)}{\partial x}\right| \le \omega_1(|x_1 - x_2|) + \omega_2(|y_1 - y_2|);$$

$$\left|\frac{\partial f(x_1,\, y_1)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_2,\, y_2)}{\partial y}\right| \le \overline{\omega}_1(|x_1 - x_2|) + \overline{\omega}_2(|y_1 - y_2|),$$

где $\omega_1(t),\ \omega_2(z),\ \overline{\omega}_1(u),\ \overline{\omega}_2(v)$ – заданные модули непрерывности. В случае, если $\omega_2(z) \equiv \overline{\omega}_1(u) = 0$, то такой класс обозначим через $W^{1,1}H^\circ_\omega$.

Для произвольной функции $f(x,\, y) \in C$ рассмотрим

$$e(f;\, x, y) = f(x, y) - S_{m,n}(f;\, x, y). \tag{1}$$

Заметим, что сплайн $S_{m,n}(f;\, x,\, y)$ в любой точке прямоугольника $Q_{k,i}$ однозначно определяется высотой, длиной прямоугольника $Q_{k,i}$ и значениями функции $f(x,\, y)$ и ее частных производных $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в вершинах этого прямоугольника. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что $0 \le x \le x_1 = h$, $0 \le y \le y_1 = g$. Для $S_{m,n}(f;\, x,\, y)$ на прямоугольнике $P = [0,\, h;\, 0, g]$ имеем следующее представление

$$\begin{aligned} S_{m,n}(f;\, x,\, y) = {} & [f(0,0)\cdot H_0(h;x)\cdot H_o(g;y) + f(h,\, 0)\cdot H_0(h;\, h-x)\cdot H_0(g;y) + \\ & + f(0,g)\cdot H_0(h;x)\cdot H_0(g;\, g-y) + f(h,\, g)\cdot H_0(h;h-x)\cdot H_0(g;g-y)] + \\ & + [f'_x(0,0)\cdot H_1(h;x)\cdot H_0(g;y) - f'_x(h,0)\cdot H_1(h;\, h-x)\cdot H_0(g;y) + \\ & + f'_x(0,g)\cdot H_1(h;x)\cdot H_0(g;\, g-y) - f'_x(h,\, g)\cdot H_1(h;h-x)\cdot H_0(g;g-y) + \\ & + f'_y(0,0)\cdot H_0(h;x)\cdot H_1(g;\, y) + f'_y(h,\, 0)\cdot H_0(h;h-x)\cdot H_1(g;y) - \\ & - f'_y(0,g)\cdot H_0(h;x)\cdot H_1(g;g-y) - f'_y(h,\, g)\cdot H_0(h;h-x)\cdot H_1(g;g-y)] = J_1 + J_2, \end{aligned}$$

где $H_k(q;t) = \sum\limits_{s=0}^{r-k} \frac{(r+s)!}{r!s!k!\, q^{r+s+1}} \cdot t^{k+s}(q-t)^{r+1},\ \ k = 0{,}1.$

Из равенства (1) и (2) имеем

$$e(f;x,y) = H_0(g;y)\cdot \int\limits_0^h \frac{\partial f(t,0)}{\partial t} Q(t)\partial t + H_0(g;g-y)\int\limits_0^h \frac{\partial f(t,g)}{\partial t} Q(t)\partial t +$$

$$+H_0(h;x)\cdot\int_0^g \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}P(z)\partial z+H_0(h;h-x)\int_0^g \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}P(z)\partial z-J_2,$$

где

$$Q(t)=\begin{cases}H_0(h;x), & 0\le t\le x;\\ -H_0(h;h-x), & x<t\le h;\end{cases}\quad P(z)=\begin{cases}H_0(g;\,y), & 0\le z\le y;\\ -H_0(g;\,g-y), & y<z\le g.\end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. Для $r=1,\ 2$ имеет место неравенство

$$\sup_{f\in W^{1,1}H_\omega}|e(f;x;y)|\le \bar\varepsilon_{r,1}(\omega_1,h,x)+\bar\varepsilon_{r,1}(\bar\omega_2,g,y)+$$
$$+\min\{[H_1(g;y)+H_1(g;g-y)]\cdot[H_0(h;x)\bar\omega_1(x)+H_0(h;h-x)\bar\omega_1(h-x)];$$
$$[H_1(h;x)+H_1(h,h-x)]\cdot[H_0(g;y)\omega_2(y)+H_0(g;g-y)\omega_2(g-y)]\},$$

а для выпуклых модулей непрерывности

$$\sup_{f\in W^{1,1}H_\omega}\|e(f;x,y)\|\le \bar\varepsilon_{r,1}\left(\omega_1,\Delta_1,\frac{\Delta_1}{2}\right)+\bar\varepsilon_{r,1}\left(\bar\omega_2,\Delta_2,\frac{\Delta_2}{2}\right)+$$
$$+\min\left\{\frac{\Delta_2}{4}\cdot\bar\omega_1\left(\frac{\Delta_1}{2}\right);\ \frac{\Delta_2}{4}\omega_2\left(\frac{\Delta_2}{2}\right)\right\},$$

где

$$\varepsilon_{r,1}(\omega,q,t)=H_0(q,t)\cdot\int_0^{\xi(t)}\omega(z)\partial z+H_0(q;q-t)\cdot\int_0^{\xi(q-1)}\omega(z)\partial z+$$
$$+H_0(q,t)\cdot H_0(q;q-t)\cdot\int_0^{\eta(t)-\xi(t)}\omega(z)\partial z,$$

$$\xi(t)=H_1(q;t)\cdot H_0^{-1}(t);\qquad \eta(t)=q-\xi(q-t).$$

Следствие 1. Имеют место неравенства для $r=1,\ 2,\ldots$

$$\sup_{f\in W^{1,1}H^0_\omega}|e(f;x,y)|\le\varepsilon_{r,1}(\omega_1,h,x)+\bar\varepsilon_{r,1}(\bar\omega_2,g,y),\tag{4}$$

$$\sup_{f\in W^{1,1}H^0_\omega}\|e(f;x,y)\|\le\bar\varepsilon_{r,1}\left(\omega_1,\Delta_1,\frac{\Delta_1}{2}\right)+\bar\varepsilon_{r,1}\left(\bar\omega_2,\Delta_2,\frac{\Delta_2}{2}\right).\tag{5}$$

При $r=1,\ 2$ в (4) и (5) знак равенства имеет место для любых выпуклых модулей непрерывности $\omega_1(t)$ и $\bar\omega_2(z)$.

Обозначим через $W^{1,1}$ КМ – класс функций, частные производные удовлетворяют условиям

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\le K,\qquad \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\le M,\qquad (x,y)\in Q.$$

Следствие 2. Определяем равенство

$$\sup_{f\in W^{1,1}KM} |e(f;x,y)| = K\left[H_0(h;x)\cdot x + H_0(h,h-x)\cdot(h-x) + H_1(h;x) +\right.$$
$$\left.+H_1(h;h-x)\right] + M\left[H_0(g;y)\cdot y + H_0(g;g-y)\cdot(g-y) + H_1(g;y) +\right.$$
$$\left.+H_1(g;g-y)\right] = \bar{e}(x,y), \qquad (x,y)\in P,$$

$$\sup_{f\in W^{1,1}KM} \|e(f;x,y)\| = \bar{e}\left(\frac{\Delta_1}{2},\frac{\Delta_2}{2}\right) = K\left[\frac{\Delta_1}{2}+\frac{\Delta_2}{4}\right] + M\left[\frac{\Delta_2}{2}+\frac{\Delta_2}{4}\right].$$

Оценку сверху для $|e(f;x,y)|$ нетрудно получить из (3), а оценка снизу следует из того, что для функции $f_\varepsilon(t,z)\in W^{1,1}KM$ частные производные которой определены уравнениями

$$\frac{\partial f_\varepsilon(t,z)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{K}{\varepsilon}t - K, & 0\le t<2\varepsilon, \\ K \quad , & 2\varepsilon\le t<x-\varepsilon, \\ -\frac{K}{\varepsilon}(t-x), & x-\varepsilon\le t<x+\varepsilon, \\ -K \quad , & x+\varepsilon\le t<h-2\varepsilon, \\ \frac{K}{\varepsilon}(t-h)+K, & h-2\varepsilon\le t\le h, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_\varepsilon(t,z)}{\partial z} = \begin{cases} \frac{M}{\varepsilon}z - M, & 0\le z<2\varepsilon, \\ M \quad , & 2\varepsilon\le z<y-\varepsilon, \\ -\frac{M}{\varepsilon}(z-y), & y-\varepsilon\le z<y+\varepsilon, \\ -M \quad , & y+\varepsilon\le z<g-2\varepsilon, \\ \frac{M}{\varepsilon}(z-g)+M, & g-2\varepsilon\le z\le g, \end{cases}$$

выполняется равенство

$$e(f_\varepsilon;x,y) = \bar{e}(x,y) - \frac{5\varepsilon}{2}(K+M).$$

Положим для $(x,y)\in Q_{k+1,i+1}$

$$h_k = x_{k+1}-x_k,\quad g_i = y_{i+1}-y_i,\quad \alpha_k^{(1)} = \frac{x_{k+1}-x}{h_k},\quad \beta_k^{(1)} = \frac{x-x_k}{h_k},$$

$$\alpha_i^{(2)} = \frac{y_{i+1}-y}{g_i},\quad \beta_i^{(2)} = \frac{y-y_i}{g_i}, \qquad (k=0,1,\dots,m-1;\ i=0,1,\dots,n-1).$$

ISSN 1562-9945

Исходя из представления (2) для сплайна $S^0_{m,n}(f;x,y)$, можно получить следующее представление

$$S^0_{m,n}(f;x,y) = f(x_k, y_i)\cdot F_r(\alpha_k^{(1)})\cdot F_r(\alpha_i^{(2)}) +$$

$$+ f(x_{k+1}, y_i)\cdot F_r(\beta_k^{(1)})\cdot F_r(\alpha_i^{(2)}) + f(x_k, y_{i+1})\cdot F_r(\alpha_k^{(1)})\cdot F_r(\beta_i^{(2)}) +$$

$$+ f(x_{k+1}, y_{i+1})\cdot F_r(\beta_k^{(1)})\cdot F_r(\beta_i^{(2)}),$$

где $F_r(u) = u^r \cdot \sum\limits_{s=0}^{r-1} C_{s+r-1}^{r-1}(1-u)^s$, $\qquad C_{m+n}^n = \dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$

Обозначим через $H_{\omega 1,\omega 2}$ совокупность функций, удовлетворяющих на Q условию

$$\left|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\right| \le \omega_1(|x_1 - x_2|) + \omega_2(|y_1 - y_2|).$$

Имеет место следующая

<u>ТЕОРЕМА 2</u>. Для произвольного разбиения Δ и произвольных модулей $\omega_1(t)$, $\omega_2(z)$ имеет место следующее равенство:

$$\sup_{f\in H_{\omega 1,\omega 2}} \left\|f(x,y) - \overset{\circ}{S}_{m,n}(f;x,y)\right\|_C = \max_{\alpha_1+\beta_1=1}\left[\omega_1(\Delta_1\cdot\beta_1)\cdot F_r(\alpha_1) +\right.$$

$$\left.+\omega_1(\Delta_1\cdot\alpha_1)\cdot F_r(\beta_1)\right] + \max_{\alpha_2+\beta_2=1}\left[\omega_2(\Delta_2\cdot\beta_2)\cdot F_r(\alpha_2) + \omega_2(\Delta_2\alpha_2)\cdot F_r(\beta_2)\right] =$$

$$= M_r(\omega_1,\omega_2), \qquad r = 1,2.$$

Используя представление (6) для $(x,y)\in Q_{k+1,\ i+1}$ получим

$$\sup\left|f(x,y) - S^0_{m,n}(f;x,y)\right| \le \omega_1(x - x_k)\cdot F_r(\alpha_k^{(1)}) +$$

$$+\omega_1(x_{k+1} - x)\cdot F_r(\beta_k^{(1)}) + \omega_2(y - y_i)\cdot F_r(\alpha_k^{(2)}) + \omega_2(y_{i+1} - y)\cdot F_r(\beta_k^{(2)}) =$$

$$= \omega_1(h_k\cdot\beta_k^{(1)})\cdot F_r(\alpha_k^{(1)}) + \omega_1(h_k\cdot\alpha_k^{(1)})\cdot F_r\beta_k^{(1)}) + \tag{7}$$

$$+\omega_2(g_i\cdot\beta_i^{(2)})\cdot F_r(\alpha_i^{(2)}) + \omega_2(g_i\cdot\alpha_i^{(2)})\cdot F_r(\beta_i^{(2)}) \le M_r(\omega_1,\omega_2).$$

Для $f_0(x,y) = f_0(x) + f_0(y)$ в (7) имеет место знак равенства . Функции $f_0(x)$ и $f_0(y)$ определяются как и в работе 2. Отсюда и следует теорема 2.

Выводы. Получены две теоремы для аппроксимации функции класса

$W^{1,1}$ КМ (имеющих ограниченные частные производные на квадрате) сплайн-функциями.

Получено 21.06.2007 г.