

**К РЕШЕНИЮ МНОГОСЛОЙНОГО ПАКЕТА ОБОЛОЧЕК****Введение**

Обычно при решении задач слоистых оболочек и пластин, в основу закладываются различные гипотезы относительно характера деформирования всего пакета в целом [1,2]. В предлагаемой работе многослойная оболочка, работающая в условиях плоской деформации, рассматривается как пакет оболочек. Для каждого слоя используются уточненные уравнения теории оболочек, приспособленные к решению контактных задач [3] со специальными коэффициентами, дающими возможность получить распределение контактного взаимодействия между слоями, достаточно близкое к действительному при любой нагрузке [4]. Ниже предлагаемый подход к решению многослойного пакета оболочек был изложен применительно к многослойному пакету оболочек в работе [5].

**Постановка задачи**

Рассмотрим пакет  $N$  одинаковых в плане оболочек, соединенных между собой либо жестко (сцепленный пакет) либо только по нормали к поверхности (односторонний гладкий контакт слоев пакета).

Каждый  $k$ -й слой пакета будем описывать уточненными уравнениями плоской деформации цилиндрической оболочки, которые в матричной форме имеют вид:

$$\delta_k \frac{d}{d\varphi} Z_k = w_k \cdot Z_k - \frac{1}{B_k} \cdot \Pi_k^{(i)} \cdot q_k^{(i)}, \quad (1)$$

$$U_k^{(j)} = A_k^{(j)} \cdot Z_k - \frac{1}{B_k} \cdot L_k^{(j,i)} \cdot q_k^{(i)}. \quad (2)$$

Здесь

$\delta_k = \frac{h_k}{R_k}$  - относительная толщина  $k$ -ой оболочки,  $h_k$ ,  $R_k$  - толщина

и средний радиус  $k$ -ой оболочки;  $\varphi$  - угловая координата;

$$A_k^{(j)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{j}{2} & -\frac{2-\nu_k}{1-\nu_k} \alpha_{13k}^{(j)} \\ 1 & -\frac{\nu_k}{1-\nu_k} \left( \frac{j}{2} + 0,15 \frac{1-\nu_k}{\nu_k} \delta_k \right) & -\frac{\nu_k}{1-\nu_k} \left( 1,2 + j \delta_k \frac{1-\nu_k}{2\nu_k} \right) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$L_k^{(j,i)} = \begin{vmatrix} -\frac{2-\nu_k}{1-\nu_k} \lambda_{1k}^{(j,i)} + \delta_k^2 \Lambda_{11k}^{(j,i)} \frac{d^2}{d\varphi^2} & \delta_k \Lambda_{13k}^{(j,i)} \frac{d}{d\varphi} \\ -\delta_k \Lambda_{31k}^{(j,i)} \frac{d}{d\varphi} & -\Lambda_{33k}^{(j,i)} \end{vmatrix}, \quad U_k^{(j)} = \begin{vmatrix} u_{2k}^{(j)} \\ u_{3k}^{(j)} \end{vmatrix}, \quad q_k^{(i)} = \begin{vmatrix} q_{2k}^{(i)} \\ q_{3k}^{(i)} \end{vmatrix}, \quad B_k = \frac{E_k}{1-\nu_k},$$

$$w_k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_k & -1 & \frac{2b}{1-\nu_k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\delta_k & 1 & b_{1k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{1k} & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_k & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad Z_k = \begin{vmatrix} V_{3k}/h_k \\ T_{2k}/h_k B_k \\ M_{2k}/h_k^2 B_k \\ V_{2k}/h_k \\ \gamma_{2k} \\ T_{3k}/h_k B_k \end{vmatrix}, \quad \Pi_k^{(i)} = \begin{vmatrix} 2\pi_{3k}^{(i)}/(1-\nu_k) & 0 \\ 1 & 0 \\ i/2 & 0 \\ \delta_k \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \pi_{11k}^{(i)} \frac{d}{d\varphi} & \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \pi_{13k}^{(i)} \\ \delta_k \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \pi_{21k}^{(i)} \frac{d}{d\varphi} & \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \pi_{23k}^{(i)} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$T_{2k}$ ,  $T_{3k}$  - нормальные и поперечные усилия в оболочке,  $M_{2k}$  - изгибающие моменты,  $V_{2k}$ ,  $V_{3k}$ ,  $\gamma_{2k}$  - соответствующие обобщенные перемещения,  $u_{2k}^{(j)} = u_{2k}^{(j)}\left(\varphi, j \frac{h}{2}\right)$ ,  $u_{3k}^{(j)} = u_{3k}^{(j)}\left(\varphi, j \frac{h}{2}\right)$  - касательные и нормальные перемещения точек лицевых поверхностей оболочки,  $j = \pm 1$  - вогнутая и выпуклая поверхности оболочки,  $i = \pm j$  - индекс суммирования,

$$b = 1,2, \quad b_{1k} = \left( 1 + 1,2 \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \right) \delta_k, \quad \pi_{3k}^{(i)} = \frac{1}{10} + \delta_k (0,067 - 0,084\nu_k),$$

$$\pi_{11k}^{(i)} = \frac{1}{12} + i\delta_k \left( 0,025 + \frac{1-\nu_k}{\nu_k} \cdot 0,05 \right), \quad \pi_{21k}^{(i)} = \frac{i}{10} + \delta_k \left( 0,051 + \frac{1-\nu_k}{\nu_k} \cdot 0,1 \right),$$

$$\pi_{13k}^{(i)} = \frac{i}{2} + \delta_k \left( 0,167 + 0,15 \cdot \frac{1-\nu_k}{\nu_k} \right), \quad \pi_{23k}^{(i)} = 1,2 + i\delta_k \frac{1-\nu_k}{\nu_k},$$

$$\alpha_{13k}^{(j)} = \frac{j}{2} + \frac{\delta_k}{2-\nu_k} (0,43 - 0,07\nu_k), \quad \lambda_{1k}^{(j,i)} = \frac{1}{12} + \frac{ij}{20} + \frac{i+j}{2} \delta_k (0,00095 + 0,0495\nu_k),$$

$$\Lambda_{11k}^{(j,i)} = \frac{1+ij}{120} + \frac{i+j}{2} \delta_k \cdot 0,003, \quad \Lambda_{13k}^{(j,i)} = \Lambda_{31k}^{(j,i)} = \frac{i+j}{20} - \delta_k \frac{1+ij}{30}, \quad \Lambda_{33k}^{(j,i)} = \frac{1+ij}{4} - \frac{i+j}{2} \delta_k \cdot 0,15$$

- коэффициенты уточненной теории оболочек [4].

Если на стороне  $j$  оболочки заданы перемещения  $u^{(j)}(\varphi)$ , то нагрузка  $q^{(j)}(\varphi)$  на этой стороне ( $i = j$ ) будет представлять собой

неизвестное контактное взаимодействие. Интегрируя систему (1), находим

$$Z_k(\varphi) = \frac{1}{\delta_k B_k} \int_{\varphi_0}^{\varphi} K_k(\varphi - \psi) \Pi^{(i)} q_k(\psi) d\psi + K_k(\varphi - \varphi_0) Z_k(\varphi_0), \quad (3)$$

где  $K_k(\varphi)$  - матрица Коши системы (1) имеет вид согласно

$$K_k(\varphi) = \begin{pmatrix} \text{Cos} \varphi & k_{12k}(\varphi) & k_{13k}(\varphi) & \text{Sin} \varphi & -\frac{\text{Sin} \varphi}{\delta_k} & k_{16k}(\varphi) \\ 0 & \text{Cos} \varphi & 0 & 0 & 0 & -\text{Sin} \varphi \\ 0 & \frac{1 - \text{Cos} \varphi}{\delta_k} & 1 & 0 & 0 & \frac{\text{Sin} \varphi}{\delta_k} \\ -\text{Sin} \varphi & k_{42k}(\varphi) & k_{43k}(\varphi) & \text{Cos} \varphi & \frac{1 - \text{Cos} \varphi}{\delta_k} & -k_{12k}(\varphi) \\ 0 & k_{43k}(\varphi) & 12 \frac{\varphi}{\delta_k} & 0 & 1 & -k_{13k}(\varphi) \\ 0 & \text{Sin} \varphi & 0 & 0 & 0 & \text{Cos} \varphi \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$k_{12k}(\varphi) = \frac{\varphi \cdot \text{Sin} \varphi}{\delta_k^3} \beta_{1k} - \frac{1 - \text{Cos} \varphi}{\delta_k^3} \beta_{2k}; \quad \beta_{1k} = \frac{1}{2} \left( 12 - 2 \cdot b_{1k} + \left( 1 - \frac{2}{1 - \nu_k} b \right) \cdot \delta_k^2 \right);$$

$$\beta_{2k} = 12 - b_{1k} \delta_k^2; \quad k_{13k}(\varphi) = -\frac{1 - \text{Cos} \varphi}{\delta_k^2} \beta_{2k}; \quad k_{16k}(\varphi) = \frac{\varphi \cdot \text{Cos} \varphi - \text{Sin} \varphi}{\delta_k^3} \beta_{1k} + \frac{2b}{1 - \nu_k} \cdot \frac{\text{Sin} \varphi}{\delta_k};$$

$$k_{42k}(\varphi) = \frac{\varphi \cdot \text{Cos} \varphi - \text{Sin} \varphi}{\delta_k^3} \beta_{1k} + 12 \frac{\varphi - \text{Sin} \varphi}{\delta_k^3} + \frac{\text{Sin} \varphi}{\delta_k}, \quad k_{43k}(\varphi) = b_{1k} \text{Sin} \varphi + 12 \frac{\varphi - \text{Sin} \varphi}{\delta_k^2}.$$

Подставляя (3) в (2), получаем относительно контактных взаимодействий уравнения

$$L_k^{(j,i)} q_k^{(i)} + \frac{1}{\delta_k} \int_{\varphi_0}^{\varphi} A_k^{(j)} K_k(\varphi - \psi) \Pi^{(i)} q_k^{(i)}(\psi) d\psi = -B_k U_k + A_k^{(j)} K_k(\varphi - \varphi_0) Z_k(\varphi_0). \quad (5)$$

Будем вести счет оболочек в пакете, начиная с вогнутой стороны пакета (рис.1).

Краевые условия на лицевых поверхностях для пакета в целом заданы в виде:

$$\Gamma^{(+1)} \begin{pmatrix} U_1^{(+1)} \\ q_1^{(+1)} \end{pmatrix} = Q^{(+1)}; \quad \Gamma^{(-1)} \begin{pmatrix} U_N^{(-1)} \\ q_N^{(-1)} \end{pmatrix} = Q^{(-1)}, \quad (6)$$

где:

$U_1^{(+1)}$  - матрица перемещений на вогнутой стороне пакета;  $U_N^{(-1)}$  - матрица перемещений на выпуклой стороне пакета;  $q_1^{(+1)}$  - матрица нагрузок или контактных взаимодействий на вогнутой стороне пакета;  $q_N^{(-1)}$  - матрица нагрузок или контактных взаимодействий на выпуклой стороне пакета;  $\Gamma^{(+1)}$  - прямоугольная матрица, определяемая видом краевых условий на вогнутой лицевой

поверхности пакета;  $\Gamma^{(-1)}$  - прямоугольная матрица, определяемая видом краевых условий на выпуклой лицевой поверхности пакета;  $Q^{(+1)}$  - матрица заданных перемещений или нагрузок на вогнутой лицевой поверхности пакета;  $Q^{(-1)}$  - матрица заданных перемещений или нагрузок на выпуклой лицевой поверхности пакета.

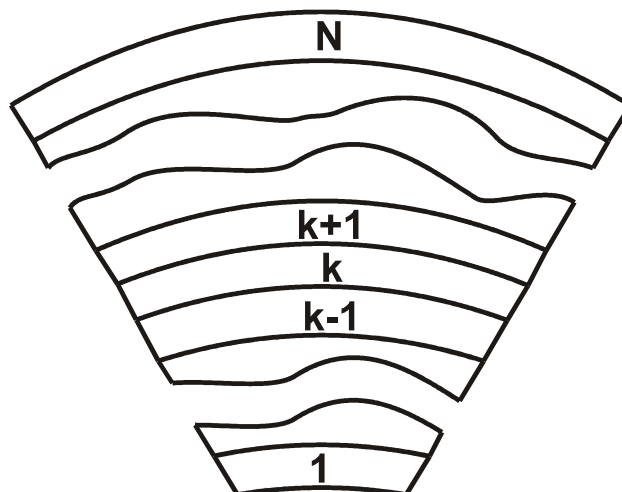


Рисунок 1

Для незамкнутых оболочек пакета должны быть заданы краевые условия на торцах

$$\Gamma_{k,(j)} Z_k^{(j)} = O_k^{(j)}, \quad (7)$$

где

$k$  - номер соответствующей оболочки,  $j = -1$  - левый торец оболочки,  $j = +1$  - правый торец оболочки;  $\Gamma_{k,(j)}$  - матрица, определяемая видом торцевых краевых условий;  $Z_k^{(j)}$  - матрица значений переменных состояний или их комбинаций, выходящих на торцы оболочки, определяемых из краевых условий;  $O_k^{(j)}$  - заданные переменные состояния или их комбинации на торцах.

Для замкнутых оболочек пакета для определения начальных значений переменных состояния  $Z_k(\varphi_0)$  используются условия цикличности

$$(1 - K_k(-2\pi)) \cdot Z_k(\varphi_0) = -\frac{1}{\delta_k B_k} \int_0^{2\pi} K_k(-\varphi) \Pi_k^{(i)} q_k(\varphi_0 + \varphi) d\varphi. \quad (8)$$

Задача состоит в определении контактных взаимодействий между оболочками и между пакетом в целом с другими телами согласно условиям (6). Используя дискретную постановку, задачу сводим к краевой задаче для пакета в целом как одной оболочки. Это

достигается путем исключения внутренних контактных взаимодействий между оболочками с помощью рекуррентных соотношений, устанавливаемых на основании условий сопряжения оболочки в пакет.

**Алгоритм решения задачи**

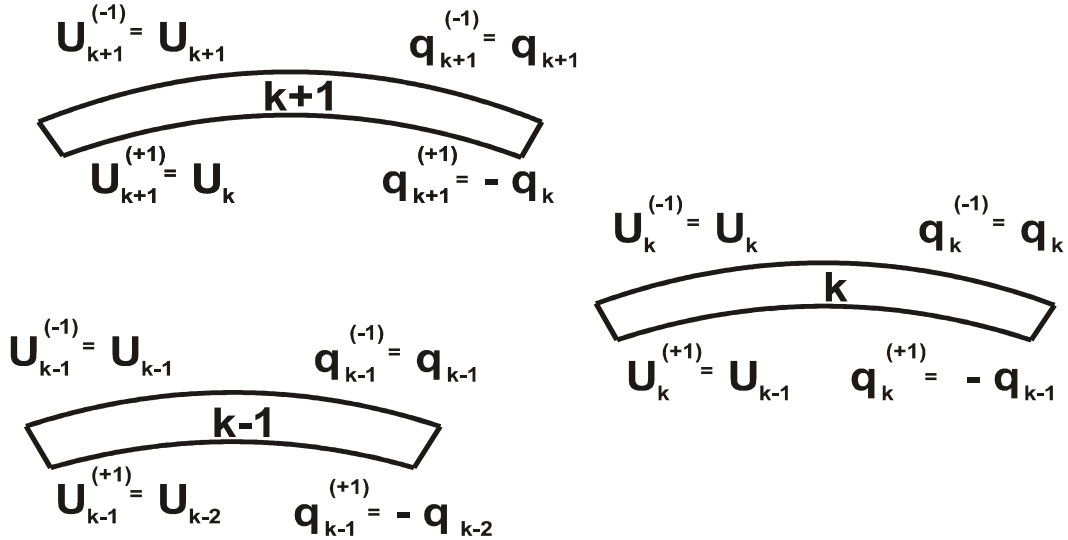


Рисунок 2

Рассмотрим  $k$ -ю,  $(k + 1)$ -ю,  $(k - 1)$ -ю оболочки (рис.2) и введем обозначения

$$U_k^{(-1)} = U_k ; q_k^{(-1)} = q_k , k = 1,2,\dots,N . \tag{9}$$

Тогда в силу условий сопряжения:

$$U_k^{(+1)} = U_{k-1}^{(-1)} , q_k^{(+1)} = -q_{k-1}^{(-1)} \tag{10}$$

имеем

$$U_k^{(+1)} = U_{k-1} ; q_k^{(+1)} = -q_{k-1} , k = 2,3,\dots,N . \tag{11}$$

В этом случае в интегральной постановке одномерных контактных задач, контактные соотношения для двух соседних оболочек  $k$ -ой и  $(k + 1)$ -ой на их общей границе приобретают вид:

- на выпуклой границе  $k$ -ой оболочки

$$-K_k^{(-1,+1)}q_{k-1} + K_k^{(-1,-1)}q_k + I_k^{(-1)}Z_k(x_0) = U_k^{(-1)} = U_k , k = 1,2,\dots,N - 1 ; \tag{12}$$

- на вогнутой границе  $(k + 1)$ -ой оболочки

$$-K_{k+1}^{(+1,+1)}q_k + K_{k+1}^{(+1,-1)}q_{k+1} + I_{k+1}^{(+1)}Z_{k+1}(x_0) = U_{k+1}^{(+1)} = U_k , k = 1,2,\dots,N . \tag{13}$$

В формулах (12), (13) введены обозначения

$$K_k^{(j,i)}q_k = L_k^{(j,i)}q_k + \frac{1}{\delta_k} \int_{\varphi_0}^{\varphi} A_k^{(j)}K_k(\varphi - \psi)\Pi^{(i)}q_k^{(i)}(\psi)d\psi , I_k^{(j)} = A_k^{(j)}K_k(\varphi - \varphi_0) . \tag{14}$$

Исключая из соотношений (12), (13) перемещения  $U_k$ , приходим к следующей зависимости между контактными взаимодействиями

$$\begin{aligned} & K_{k+1}^{(-1,+1)} q_{k+1} + I_{k+1}^{(-1)} \cdot Z_{k+1}(x_0) = \\ & = -K_k^{(+1,-1)} q_{k-1} + (K_k^{(+1,+1)} + K_{k+1}^{(-1,-1)}) q_k + I_k^{(+1)} \cdot Z_k(x_0); \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (15)$$

Если к соотношению (15) добавить тождество  $q_k = q_k$  и краевые условия на торцах (7) для незамкнутых оболочек или условие периодичности (8) для замкнутых оболочек с учетом выражений переменных состояния (3), получим рекуррентное соотношение, представимое в матричной форме в виде:

$$M_{k+1} t_{k+1} = N_k t_k + O_{k+1}, \quad (16)$$

где

$$t_k = \begin{Bmatrix} q_{k-1} \\ q_k \\ Z_k(\varphi_0) \end{Bmatrix}; \quad O_{k+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ O_{k+1}^{(+1)} \\ O_{k+1}^{(-1)} \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

Соотношения (16) представляют собой интегродифференциальные зависимости между основными неизвестными  $t_k$  и  $t_{k+1}$  соседних пластин. Эти соотношения допускают разрешение относительно основных неизвестных  $t_{k+1}$ , однако, в общем случае выполнить это в замкнутом виде затруднительно. Поэтому заменим эти уравнения дискретным аналогом (производные – конечными разностями, интегралы – конечными суммами). При этом компоненты матриц – столбцов  $t_k$  будут представлять собой значения этих величин на множестве дискретных точек, определяемых видом интерполяционных и квадратурных формул, а элементы матриц  $M_{k+1}$ ,  $N_k$  – коэффициенты указанных формул.

Разрешая соотношения (16) относительно  $t_{k+1}$ , приходим к следующим рекуррентным соотношениям

$$t_{k+1} = M_{k+1}^{-1} N_k t_k + M_{k+1}^{-1} O_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (18)$$

Применяя последовательно полученное соотношение, приходим к выражению основных неизвестных  $k$ -ой пластины через основные неизвестные первой пластины.

Аналогично подходу к решению многослойного пакета пластин, изложенному в работе [5], подставляем выражения основных неизвестных для  $N$ -ой оболочки через основные неизвестные первой оболочки в краевые условия на лицевых поверхностях для пакета в

целом (6) и добавляя условия на торцах (7) или условия цикличности (8) для первой оболочки, получаем полную систему уравнений относительно основных неизвестных для первой оболочки. Обращая эту систему находим  $t_1$ , а затем по рекуррентным соотношениям (18) определяются основные неизвестные для остальных оболочек пакета.

### Иллюстрация на примере пакета оболочек под действием равномерного внутреннего давления

В качестве тестового примера рассмотрим пятислойный пакет оболочек под действием равномерного внутреннего давления  $q$  (рис.3). Каждый слой при этом представляет собой круглую трубу, работающую в условиях плоской деформации под действием внутреннего и внешнего равномерных давлений.

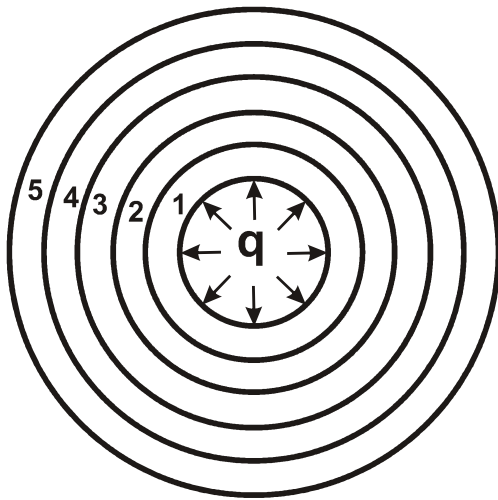


Рисунок 3

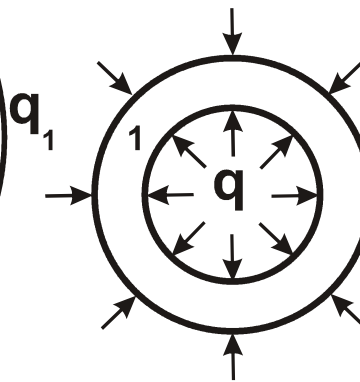


Рисунок 4

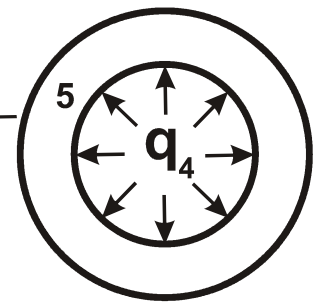


Рисунок 5

Для первого слоя давление  $q$  на вогнутой поверхности задано, а на выпуклой возникает неизвестное контактное взаимодействие  $q_1$  (рис.4). Для пятого слоя (рис.5) выпуклая поверхность свободна, а на вогнутой – неизвестное контактное взаимодействие  $q_4$ . Для промежуточных слоев на обеих поверхностях неизвестные контактные взаимодействия. Для такой осесимметричной задачи в постановке теории упругости формулы Ламе для каждого слоя дают выражения радиальных перемещений лицевых поверхностей трубы через контактные давления или нагрузки.

Таким образом, есть возможность с помощью указанного выше алгоритма получить решение рассматриваемой задачи и в постановке теории упругости.

В таблицах 1, 2 приведены значения относительных контактных взаимодействий  $\frac{q_i}{q}$  ( $i=1,2,3,4$ ) между слоями в постановках теории упругости и используемой уточненной теории оболочек: для тонкого пакета относительной толщины  $\delta=0.05$  (табл.1), для толстостенного пятислойного цилиндра относительной толщины  $\delta=0.25$  (табл.2). При этом жесткости и относительные толщины отдельных слоев между собой равны.

Таблица 1

	Теория упругости	Теория пластин
$q_1/q$	0.808	0.796
$q_2/q$	0.61	0.594
$q_3/q$	0.408	0.394
$q_4/q$	0.204	0.196

Таблица 2

	Теория упругости	Теория пластин
$q_1/q$	0,842	0,778
$q_2/q$	0,652	0,567
$q_3/q$	0,441	0,368
$q_4/q$	0,22	0,179

### Выводы

Из рассмотренной задачи следует, что отличие относительного контактного взаимодействия между слоями пакета в постановках уточненной теории оболочек и теории упругости колеблется от 7,6% до 18% для многослойного толстостенного цилиндра и от 1,5% до 4% - для тонкого пакета.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями / Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. – Киев: наук. Думка, 1988.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1974. – 360 с.
3. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.:Машиностроение, 1980.
4. Наумова И.Ю. Построение уравнений обобщенной теории пластин, применяемых в контактных задачах. Днепропетровск, 1990. 82с. Деп. В УкрНИИТИ 07.03.90, №05-Ук90.
5. Наумова И.Ю. Системный подход к решению одномерных контактных задач пластин // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 1(48) – Дніпропетровськ. 2007 – С. 11-19.

Получено 18.06.2007 г.