

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВУХМЕРНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ  
СПЛАЙНОВ ПРИ РЕШЕНИИ СВЯЗАННЫХ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ  
ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ**

**Введение.** Одним из наиболее эффективных приемов при численном решении пространственных нестационарных задач теории термоупругопластичности является подход, основанный на использовании для определения неизвестных величин, метода дробных шагов или метода покомпонентного расщепления [3,4,6,7, 12-14,19,23-25,28] в сочетании с представлением искомых величин в виде сплайн-функций [1,5,19-21,27]. Преимущество данного подхода обусловлено тремя факторами. Он не сложнее в реализации, чем конечно-разностный метод. Решение находится в виде сплайна во всей области определения, в то время как разностное решение ищется только на сетке [1, 5]. Дает более высокий порядок аппроксимации, что позволяет выбирать более крупную сетку по координатам по сравнению с конечно-разностным методом при условии достижения одинаковой точности вычислений [2, 12, 13].

В работах [8-13, 15-18, 26, 29, 30] решен ряд нестационарных задач механики, где применялись физические соотношения, позволяющие описывать простые и близкие к простым процессы деформирования и процессы деформирования по траекториям малой кривизны. Связанные нестационарные задачи теории термоупругопластичности решены в работах [15-18, 26, 29, 30]. Отметим, что здесь используется форма физических уравнений, приведенная в монографии [13]. При этом двухмерные сплайны использовались для аппроксимации неизвестных величин в работах [7,14,19-21].

Сами соотношения теории процессов малой кривизны при неизотермических процессах деформирования элемента тела разрабатывались в отделе термопластичности Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины под руководством академика НАН

Украины Шевченко Ю.Н. и получили экспериментальное обоснование [22].

**Постановка нестационарных задач теории термоупругопластичности.** Основной задачей нестационарной теории термоупругопластичности является определение перемещений (скоростей перемещений) и компонент тензоров напряжений и деформаций, возникающих в пространственном теле в процессе его нагружения, когда некоторые элементы тела работают за пределом упругости материала. Процесс нагружения будем рассматривать развивающимся во времени, что может вызвать движение отдельных частей тела.

Пусть первоначально изотропное и однородное двумерное тело  $V$ , ограниченное поверхностью  $S$ , в начальный момент времени  $t=0$  находится в естественном ненапряженном состоянии, где  $\alpha^i$  - оси произвольной ортогональной системы координат,  $i = 1, 2, 3$ . Затем тело подвергается нагружению внешними силами и нагреву. Это могут быть объемные силы  $\vec{K}(\alpha^i, t)$ , воздействующие на каждый элемент тела, и поверхностные силы  $\vec{\Sigma}_n(\alpha^i, t)$ , действующие на части поверхности тела  $S_\Sigma$ . На другой части поверхности тела  $S_\nu$ , которая может быть определенным образом закреплена, задаются скорости перемещений  $\vec{V}(\alpha^i, t)$ . Конфигурация тела задается уравнением поверхности  $\Phi(\alpha^i) = 0$ , которая ограничивает его. Механические характеристики материала (в случае необратимых деформаций) при исследовании процессов деформирования по прямолинейным траекториям и траектория малой кривизны задаются в виде мгновенных диаграмм растяжения образцов.

Исходя из перечисленных данных, необходимо определить температурное поле три составляющие вектора скорости перемещений, шесть компонент тензора напряжений и шесть компонент тензора деформаций. Следовательно, подлежат определению 16 неизвестных функций времени и трех координат. Для этого необходимо воспользоваться уравнениями движения, геометрическими, физическими уравнениями и уравнением теплопроводности.

При решении нестационарной задачи теории пластичности в тех частях тела, где возникают необратимые деформации, будем

пользоваться определяющими уравнениями, описывающими процессы нагружения как по прямолинейным траекториям, так и по траекториям деформирования малой кривизны. После решения задачи по геометрии траектории деформирования можно судить о достоверности используемых определяющих соотношений.

Полная система уравнений в частных производных решается при определенных начальных и граничных условиях [12, 13].

**Метод решения.** Приведем полную систему уравнений к виду [12]

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \beta} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \gamma} + \vec{B} \quad (1)$$

где  $\vec{W}$  - вектор, компонентами которого будут скорости перемещений  $v_i$ , составляющие тензоров напряжений и деформаций  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, i, j = 1, 2, 3$  ( $w_1 = v_1; w_2 = v_2; w_3 = v_3; w_4 = \sigma_{11}; w_5 = \sigma_{22}; w_6 = \sigma_{33}; w_7 = \tau_{12}; w_8 = \tau_{13}; w_9 = \tau_{23}; w_{10} = \tau_{11}; w_{11} = \tau_{22}; w_{12} = \tau_{33}; w_{13} = \tau_{12}; w_{14} = \tau_{13}; w_{15} = \tau_{23}$ ).

Нестационарное трехмерное уравнение теплопроводности, используемое при решении связанных задач механики деформируемого твердого тела, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial \gamma} \right) \right] + B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad (2)$$

где  $B(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = S_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{S_{ij} \dot{S}_{ij}}{2G_0} + \frac{\sigma_{ij}}{3} (\dot{\varepsilon}_{ij} - 3\alpha \dot{T}) - \frac{\sigma_{ii} \dot{\sigma}_{ii}}{9K_0}$ ,  $H_1, H_2, H_3$  - коэффициенты

Ляме.

При решении пространственных задач в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, x$  в уравнении (2) следует положить  $H_1 = H_3 = 1, H_2 = r, \alpha = r, \beta = \varphi, \gamma = x$ . Тогда из уравнения (2) получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] + B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}). \quad (3)$$

Применим для решения к системе (1) и уравнению (3) метод покомпонентного расщепления [12, 13]. Введем в рассмотрение сетку по времени  $\omega_r$  с учетом дробного шага.

$$\omega_r = \left\{ \begin{array}{l} t_p; t_{p+1/3} = t_p + \tau_1; t_{p+2/3} = t_{p+1/3} + \tau_2; t_{p+1} = t_{p+2/3} + \tau_3; \\ \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3; t_0 = 0; p = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \quad (4)$$

Схема расщепления Писмана, Рэчфорда, Дугласа уравнения (3) может быть представлена так [3].

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + \gamma_1 B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}), & t \in [t_p; t_{p+1/3}], \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= a \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \gamma_2 B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}), & t \in [t_{p+1/3}; t_{p+2/3}], \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma_3 B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}), & t \in [t_{p+2/3}; t_{p+1}] \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$ .

Неявная разностная схема на дробных шагах в точке  $r_i, \varphi_j, x_k$

$$\begin{aligned} \frac{T^{p+1/3} - T^p}{\tau} &= \frac{a}{h_1^2} \left[ \alpha \left( \mu_1(T^{p+1/3}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^{p+1/3}) \right) + \beta \left( \mu_1(T^p) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^p) \right) \right] + \\ &+ \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} [\alpha \mu_2(T^{p+1/3}) + \beta \mu_2(T^p)] + \gamma_1 B^p, \\ \frac{T^{p+2/3} - T^{p+1/3}}{\tau} &= \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} [\alpha \mu_2(T^{p+2/3}) + \beta \mu_2(T^{p+1/3})] + \\ &+ \frac{a}{h_3^2} [\alpha \mu_3(T^{p+2/3}) + \beta \mu_3(T^{p+1/3})] + \gamma_2 B^{p+1/3}, \\ \frac{T^{p+1} - T^{p+2/3}}{\tau} &= \frac{a}{h_3^2} [\alpha \mu_3(T^{p+1}) + \beta \mu_3(T^{p+2/3})] + \\ &+ \frac{a}{h_1^2} \left[ \alpha \left( \mu_1(T^{p+1}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^{p+1}) \right) + \beta \left( \mu_1(T^{p+2/3}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^{p+2/3}) \right) \right] + \gamma_3 B^{p+2/3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для явной схемы ( $\alpha=0, \beta=1$ ) можно записать такие расчетные формулы

$$\begin{aligned} T^{p+1/3} &= T^p + \tau \left[ \frac{a}{h_1^2} \left( \mu_1(T^p) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^p) \right) + \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} \mu_2(T^p) + \gamma_1 B^p \right], \\ T^{p+2/3} &= T^{p+1/3} + \tau \left[ \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} \mu_2(T^{p+1/3}) + \frac{a}{h_3^2} \mu_3(T^{p+1/3}) + \gamma_2 B^{p+1/3} \right], \\ T^{p+1} &= T^{p+2/3} + \tau \left[ \frac{a}{h_3^2} \mu_3(T^{p+2/3}) + \frac{a}{h_1^2} \left( \mu_1(T^{p+2/3}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^{p+2/3}) \right) + \gamma_3 B^{p+2/3} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

При помощи формул (7) определяется нулевое приближение ( $T_0^{p+n/3}, n = 1, 2, 3$ ) для следующей итерационной процедуры

$$\begin{aligned} T_j^{p+1/3} &= T^p + \left\{ \begin{aligned} &\frac{a}{h_1^2} \left[ \alpha \left( \mu_1(T^{p+1/3}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^{p+1/3}) \right) + \beta \left( \mu_1(T^p) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^p) \right) \right] + \\ &+ \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} [\alpha \mu_2(T^{p+1/3}) + \beta \mu_2(T^p)] + \gamma_1 B^p \end{aligned} \right\}_{j-1}, \\ T_j^{p+2/3} &= T^{p+1/3} + \left\{ \begin{aligned} &\gamma_2 B^{p+1/3} + \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} [\alpha \mu_2(T^{p+2/3}) + \beta \mu_2(T^{p+1/3})] + \\ &+ \frac{a}{h_3^2} [\alpha \mu_3(T^{p+2/3}) + \beta \mu_3(T^{p+1/3})] \end{aligned} \right\}_{j-1}, \end{aligned}$$

$$T_j^{p+1} = T^{p+2/3} + \left\{ \begin{aligned} & \gamma_3 B^{p+2/3} + \frac{a}{h_3^2} [\alpha \mu_3 (T^{p+1}) + \beta \mu_3 (T^{p+2/3})] + \\ & + \frac{a}{h_1^2} \left[ \alpha \left( \mu_1 (T^{p+1}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1 (T^{p+1}) \right) + \beta \left( \mu_1 (T^{p+2/3}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1 (T^{p+2/3}) \right) \right] \end{aligned} \right\}_{j-1} \quad (8)$$

Здесь  $\lambda_n, \mu_n$  ( $n=1,2,3$ )- разностные операторы, аппроксимирующие производные соответственно первого и второго порядка по координатам [12,13].

Алгоритм определения температурного поля цилиндрического тела, организованный на основании формул (7), (8), сочетает в себе преимущества явной разностной схемы и достоинства неявной схемы.

Перейдем к решению системы (1). Обозначим  $\vec{w}^{p+n/3}$  вектор  $\vec{w}$ , вычисленный для момента времени  $t=t_{p+n/3}$  ( $n=0, 1, 2, 3$ ). Аналогичные обозначения вводятся и для вектора  $\vec{b}$ . При переходе от уравнений полной системы к разностной схеме их решения производные по времени заменяются разностными отношениями, а производные по координатам представляются линейной комбинацией производных, заданных на предыдущем временном слое  $t_{p+(n-1)/3}$  и на том, на котором ищется решение  $t_{p+n/3}$ .

Согласно [3, 12] исходная нестационарная пространственная задача вида (1) может быть сведена к системе трех последовательно решаемых двухмерных задач на дробных шагах по времени (схема Писмана, Рэчфорда, Дугласа)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \beta} \right) + \gamma_1 \vec{B}^p, \quad t \in [t^p; t^{p+1/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \beta} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \gamma} \right) + \gamma_2 \vec{B}^{p+1/3}, \quad t \in [t^{p+1/3}; t^{p+2/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \gamma} + A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha} \right) + \gamma_3 \vec{B}^{p+2/3}, \quad t \in [t^{p+2/3}; t^{p+1}], \end{aligned} \quad (9)$$

Рекуррентные формулы неявной схемы метода расщепления для определения неизвестных величин, позволяют получить соответственно третий порядок аппроксимации метода по координатам [13].

$$\begin{aligned} (W_m)_k^{p+1/3} &= R_{1m} + \frac{a \tau}{2 h_1} (\Lambda_1 W_m + \Lambda_2 W_m)_{k-1}^{p+1/3}, \\ (W_m)_k^{p+2/3} &= R_{2m} + \frac{a \tau}{2 h_2} (\Lambda_2 W_m + \Lambda_3 W_m)_{k-1}^{p+2/3}, \\ (W_m)_k^{p+1} &= R_{3m} + \frac{a \tau}{2 h_3} (\Lambda_3 W_m + \Lambda_1 W_m)_{k-1}^{p+1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $k$  – номер итерации,  $\tau$  – шаг интегрирования по времени,  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_3$  – дифференциальные операторы, аппроксимирующие первые производные по координатам [12, 13], а также введены

$$\begin{aligned} R_{1m} &= W_m^p + \tau\gamma_1 B_m^p + \frac{b\tau}{2h_1} (\Lambda_1 W_m + \Lambda_2 W_m)^p, \\ R_{2m} &= W_m^{p+1/3} + \tau\gamma_2 B_m^{p+1/3} + \frac{b\tau}{2h_2} (\Lambda_2 W_m + \Lambda_3 W_m)^{p+1/3}, \\ R_{3m} &= W_m^{p+2/3} + \tau\gamma_3 B_m^{p+2/3} + \frac{b\tau}{2h_3} (\Lambda_3 W_m + \Lambda_1 W_m)^{p+2/3}. \end{aligned}$$

Здесь  $a + b = 1$ . В случае использования схемы Кранка-Николсона, которая позволяет получить второй порядок аппроксимации метода по времени, в формулах (10) следует положить  $a = b = 1/2$ .

В качестве нулевой итерации будем использовать решение определенное по явной схеме. Для этого можно использовать формулы (10), в которых следует положить  $a = 0$ , а  $b = 1$

$$\begin{aligned} (W_m)_0^{p+1/3} &= W_m^p + \tau\gamma_1 B_m^p + \frac{\tau}{2h_1} (\Lambda_1 W_m + \Lambda_2 W_m)^p, \\ (W_m)_0^{p+2/3} &= W_m^{p+1/3} + \tau\gamma_2 B_m^{p+1/3} + \frac{\tau}{2h_2} (\Lambda_2 W_m + \Lambda_3 W_m)^{p+1/3}, \\ (W_m)_0^{p+1} &= W_m^{p+2/3} + \tau\gamma_3 B_m^{p+2/3} + \frac{\tau}{2h_3} (\Lambda_3 W_m + \Lambda_1 W_m)^{p+2/3}. \end{aligned}$$

Для построения решения уравнения теплопроводности по формулам (8) и системы (1) по формулам (10) воспользуемся двухмерными напряженными сплайнами [19]. Неизвестные величины (составляющие вектора  $\vec{W}$ ) разыскиваются в виде линейной комбинации двумерных сплайнов.

$$W_m(\xi; \eta) = \sum_{l=1}^2 \sum_{n=1}^2 b_{i+l, j+n} S_{2D}(\xi; \eta). \quad (11)$$

Здесь, например, для первого уравнения схемы переменных направлений (9)

$$\xi = \frac{1}{h_1}(\alpha - \alpha_i), \quad \eta = \frac{1}{h_2}(\beta - \beta_j), \quad \alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}], \beta \in [\beta_j, \beta_{j+1}].$$

Для второго и третьего векторных уравнений из системы (9) безразмерные координаты определяются так

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{h_2}(\beta - \beta_j), \quad \eta = \frac{1}{h_3}(\gamma - \gamma_k), \quad \beta \in [\beta_j, \beta_{j+1}], \gamma \in [\gamma_k, \gamma_{k+1}], \\ \xi &= \frac{1}{h_2}(\gamma - \gamma_k), \quad \eta = \frac{1}{h_1}(\alpha - \alpha_i), \quad \alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}], \gamma \in [\gamma_k, \gamma_{k+1}]. \end{aligned}$$

Через  $h_1, h_2, h_3$  обозначены шаги интегрирования по координатам  $\alpha, \beta, \gamma$ , где  $\alpha \equiv z, \beta \equiv \varphi, \gamma \equiv x$ .

**Двухмерный базисный напряженный сплайн.** Приведем основные сведения о напряженных сплайнах. Следуя работе [19] в каждой вспомогательной области двухмерный напряженный сплайн разыскивается в виде следующего тензорного произведения

$$S_{2D} = [a_0 + a_1\xi + a_2sh(\sqrt{2}\xi) + a_3ch(\sqrt{2}\xi)] \cdot [b_0 + b_1\eta + b_2sh(\sqrt{2}\eta) + b_3ch(\sqrt{2}\eta)], \quad (12)$$

где  $\xi \in [0;1], \eta \in [0;1]$ , а для определения величин  $a_i, b_i, i = 0;1;2;3$  используются определенные условия. Поверхность (12) симметрична относительно осей координат и состоит из шестнадцати «склеенных» частей трех типов.

Для угловой области  $A$  (рисунок 1) эти условия в вершинах квадрата  $A(0;0), B(0;1), C(1;0), D(1;1)$  имеют вид

$$S_{2D}(0;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(0;1) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(1;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(1;1) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = W'_D, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = W'_D.$$

Удовлетворяя этим условиям с учетом симметрии поверхности (12) относительно диагонали  $\xi = \eta$  получим

$$S_{2D} = [k_0(1 - ch\sqrt{2}\xi) + k_1\xi + k_2sh\sqrt{2}\xi] \cdot [k_0(1 - ch\sqrt{2}\eta) + k_1\eta + k_2sh\sqrt{2}\eta], \quad (13)$$

где, следуя работе [26],

$$k_0 = -0,57235; k_1 = -0,37114; k_2 = 0,26244.$$

Для центральной под области  $C$  условия в вершинах квадрата  $D(0;0), N(0;1), F(1;0), M(1;1)$  имеют вид

$$S_{2D}(0;0) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = W'_D, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = W'_D, S_{2D}(0;1) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = W'_F, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(1;0) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = W'_F, S_{2D}(1;1) = W_M, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = 0.$$

В центральной под области  $C$  поверхность, которую задает сплайн (12), также симметрична относительно диагонали  $\xi = \eta$ .

Удовлетворяя условиям в узлах получим

$$S_{2D} = [n_0 + n_1\xi + n_2sh\sqrt{2}\xi + n_3ch\sqrt{2}\xi] [n_0 + n_1\eta + n_2sh\sqrt{2}\eta + n_3ch\sqrt{2}\eta], \quad (14)$$

где

$$n_0 = -0,42838; n_1 = 2,56711; n_2 = -1,39527; n_3 = 0,6325.$$

Для под областей  $B$ , которые объединяют под области  $A$  и  $C$  в вершинах квадрата  $C(0;0), D(0;1), E(1;0), F(1;1)$  выполняются условия



$$S_{2D}(0;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(0;1) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = W'_D, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = W''_D,$$

$$S_{2D}(1;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(1;1) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = W'_F.$$

На основании этого можно записать

$$S_{2D}(\xi, \eta) = (m_0 + m_1\xi + m_2sh\sqrt{2}\xi + m_3ch\sqrt{2}\xi) \cdot [m_4(1 - ch\sqrt{2}\eta) + m_5(sh\sqrt{2}\eta - \sqrt{2})]. \quad (15)$$

Здесь

$$m_0 = 3,78066; m_1 = -10,62084; m_2 = 7,28425; m_3 = -4,31838; m_4 = 0,19552; m_5 = 0,29351.$$

Отметим, что в условия (5), (7), (9) входят параметры базисного напряженного сплайна  $W_D, W_F, W_M, W'_D, W'_F$ , которые подобраны так, чтобы в сечениях  $\xi = 0, \eta = 0$ , как частный случай, получался одномерный базисный кубический сплайн ( $W_M = 2/3, W_F = 1/6, W'_F = 0,48492, W_D = 1/24, W'_D = W'_F / 4 = 0,12123$ ).

Вспомогательные области А, В, В<sub>1</sub>, С и т.д. вместе с локальными системами координат  $\xi, \eta$  приведены в работах [20, 21].

Следуя работам [19-21], общее выражение для двухмерного базисного сплайна третьей степени по каждой из координат для полной области определения  $x \in [-2;2], y \in [-2;2]$  представим так

$$S_{2D}(x; y) = \begin{cases} \varphi_k(\xi) \cdot \varphi_k(\eta), \\ \text{где} \begin{cases} \xi = x + 2, \eta = y + 2, x \in [-2; -1], y \in [-2; -1] \quad (A), \\ \xi = 2 - y, \eta = x + 2, x \in [-2; -1], y \in [1; 2] \quad (A_1), \\ \xi = -x + 2, \eta = -y + 2, x \in [1; 2], y \in [1; 2] \quad (A_2), \\ \xi = y + 2, \eta = -x + 2, x \in [1; 2], y \in [-2; -1] \quad (A_3), \end{cases} \\ \varphi_m(\xi) \cdot \psi_m(\eta), \\ \text{где} \begin{cases} \xi = x + 1, \eta = y + 2, x \in [-1; 0], y \in [-2; -1] \quad (B), \\ \xi = y + 1, \eta = x + 2, x \in [-2; -1], y \in [-1; 0] \quad (B_1), \\ \xi = 1 - y, \eta = x + 2, x \in [-2; -1], y \in [0; 1] \quad (B_2), \\ \xi = x + 1, \eta = 2 - y, x \in [-1; 0], y \in [1; 2] \quad (B_3), \\ \xi = -x + 1, \eta = -y + 2, x \in [0; 1], y \in [1; 2] \quad (B_4), \\ \xi = -y + 1, \eta = -x + 2, x \in [1; 2], y \in [0; 1] \quad (B_5), \\ \xi = y + 1, \eta = -x + 2, x \in [1; 2], y \in [-1; 0] \quad (B_6), \\ \xi = -x + 1, \eta = y + 2, x \in [0; 1], y \in [-2; -1] \quad (B_7), \end{cases} \\ \varphi_n(\xi) \cdot \varphi_n(\eta), \\ \text{где} \begin{cases} \xi = x + 1, \eta = y + 1, x \in [-1; 0], y \in [-1; 0] \quad (C), \\ \xi = 1 - y, \eta = x + 1, x \in [-1; 0], y \in [0; 1] \quad (C_1), \\ \xi = -x + 1, \eta = -y + 1, x \in [0; 1], y \in [0; 1] \quad (C_2), \\ \xi = y + 1, \eta = -x + 1, x \in [0; 1], y \in [-1; 0] \quad (C_3). \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

Здесь введены в рассмотрение четыре вспомогательные функции

$$\varphi_k(t) = k_0(1 - ch\sqrt{2}t) + k_1t + k_2sh\sqrt{2}t, \quad \varphi_m(t) = m_0 + m_1t + m_2sh\sqrt{2}t + m_3ch\sqrt{2}t, \quad (17)$$

$$\psi_m(t) = m_4(1 - ch\sqrt{2}t) + m_5(sh\sqrt{2}t - \sqrt{2}), \quad \varphi_n(t) = n_0 + n_1t + n_2sh\sqrt{2}t + n_3ch\sqrt{2}t,$$



Производные первого порядка от этих функций определяются так

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_k(t)}{dt} \equiv \varphi_k^{(1)}(t) &= k_1 + \sqrt{2}(k_2 ch\sqrt{2t} - k_0 sh\sqrt{2t}), \quad \frac{d\varphi_m(t)}{dt} \equiv \varphi_m^{(1)}(t) = m_1 + \sqrt{2}(m_2 ch\sqrt{2t} + m_3 sh\sqrt{2t}), \\ \frac{d\varphi_n(t)}{dt} \equiv \varphi_n^{(1)}(t) &= n_1 + \sqrt{2}(n_2 ch\sqrt{2t} + n_3 sh\sqrt{2t}), \quad \frac{d\psi_m(t)}{dt} \equiv \psi_m^{(1)}(t) = \sqrt{2}(m_3 ch\sqrt{2t} - m_4 sh\sqrt{2t}) \end{aligned} \quad (18)$$

Для вторых производных можно записать

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_k(t)}{dt^2} \equiv \varphi_k^{(2)}(t) &= 2(k_2 sh\sqrt{2t} - k_0 ch\sqrt{2t}), \quad \frac{d^2\varphi_m(t)}{dt^2} \equiv \varphi_m^{(2)}(t) = 2(m_2 sh\sqrt{2t} + m_3 ch\sqrt{2t}), \\ \frac{d^2\varphi_n(t)}{dt^2} \equiv \varphi_n^{(2)}(t) &= 2(n_2 sh\sqrt{2t} + n_3 ch\sqrt{2t}), \quad \frac{d^2\psi_m(t)}{dt^2} \equiv \psi_m^{(2)}(t) = 2(m_3 sh\sqrt{2t} - m_4 ch\sqrt{2t}) \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда поверхность каждой части нормированного базисного двухмерного сплайна, задаваемого выражением (12) в единой системе координат  $x, y$  может быть описана при помощи следующих функций

$$\begin{aligned} S_{01}(x; y) &= \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(y), & S_{02}(x; y) &= \varphi_m(x) \cdot \psi_m(y), \\ S_{03}(x; y) &= \psi_m(x) \cdot \varphi_m(y), & S_{04}(x; y) &= \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(y), \\ S_{05}(x; y) &= \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(1-y), & S_{06}(x; y) &= \psi_m(x) \cdot \varphi_m(1-y), \\ S_{07}(x; y) &= \varphi_m(x) \cdot \psi_m(1-y), & S_{08}(x; y) &= \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(1-y), \\ S_{09}(x; y) &= \varphi_k(1-x) \cdot \varphi_k(1-y), & S_{10}(x; y) &= \varphi_m(1-x) \cdot \psi_m(1-y), \\ S_{11}(x; y) &= \psi_m(1-x) \cdot \varphi_m(1-y), & S_{12}(x; y) &= \varphi_n(1-x) \cdot \varphi_n(1-y), \\ S_{13}(x; y) &= \varphi_k(1-x) \cdot \varphi_k(y), & S_{14}(x; y) &= \psi_m(1-x) \cdot \varphi_m(y), \\ S_{15}(x; y) &= \varphi_m(1-x) \cdot \psi_m(y), & S_{16}(x; y) &= \varphi_n(1-x) \cdot \varphi_n(y). \end{aligned} \quad (20)$$

В результате этого двухмерный сплайн приводится к виду

$$S_{2D}(x; y) = \sum_{k=1}^{16} b_k \cdot S_k(x; y), \quad x, y \in [0;1] \quad (21)$$

Выражение (21) в прикладных задачах удобно использовать в несколько ином виде. Для этого выразим неизвестные коэффициенты сплайна  $b_k, (k=1,2,\dots,16)$  через значения некоторой функции  $w(x; y)$  в узлах  $(i/3; j/3), i, j = 0,1,2,3$ , т.е.  $w(i/3; j/3) \equiv w_{ij}$ . Система, из которой находятся коэффициенты  $b_k, (k=1,2,\dots,16)$  выглядит так

$$b_k \cdot S_k(i/3; j/3) = w_{ij}, \quad (i, j = 0,1,2,3) \quad (22)$$

или

$$\vec{b} \cdot B = \vec{w},$$

где  $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_{16}\}, \vec{w} = \{w_{00}, w_{10}, w_{20}, \dots, w_{23}, w_{33}\}$  - вектора, а  $B$  - матрица размера **16x16**, элементами которой являются  $S_k(i/3; j/3), (i, j = 0,1,2,3)$ .

Решение системы (22) приводится к виду

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha_1 w_{00} + \alpha_2 w_{10} + \alpha_3 w_{20} + \alpha_4 w_{30} + \alpha_2 w_{01} + \alpha_6 w_{11} + \alpha_7 w_{21} + \alpha_8 w_{31} + \\ &+ \alpha_3 w_{02} + \alpha_7 w_{12} + \alpha_{11} w_{22} + \alpha_{12} w_{32} + \alpha_4 w_{03} + \alpha_8 w_{13} + \alpha_{12} w_{23} + \alpha_{16} w_{33}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \beta_1 w_{00} + \beta_2 w_{10} + \beta_3 w_{20} + \beta_4 w_{30} + \beta_5 w_{01} + \beta_6 w_{11} + \beta_7 w_{21} + \beta_8 w_{31} + \\
&\quad + \beta_9 w_{02} + \beta_{10} w_{12} + \beta_{11} w_{22} + \beta_{12} w_{32} + \beta_{13} w_{03} + \beta_{14} w_{13} + \beta_{15} w_{23} + \beta_{16} w_{33}, \\
b_3 &= \beta_1 w_{00} + \beta_5 w_{10} + \beta_9 w_{20} + \beta_{13} w_{30} + \beta_2 w_{01} + \beta_6 w_{11} + \beta_{10} w_{21} + \beta_{14} w_{31} + \\
&\quad + \beta_3 w_{02} + \beta_7 w_{12} + \beta_{11} w_{22} + \beta_{15} w_{32} + \beta_4 w_{03} + \beta_8 w_{13} + \beta_{12} w_{23} + \beta_{16} w_{33}, \\
b_4 &= \omega_4 w_{00} + \omega_3 w_{10} + \omega_2 w_{20} + \omega_1 w_{30} + \omega_3 w_{01} + \omega_7 w_{11} + \omega_6 w_{21} + \omega_5 w_{31} + \\
&\quad + \omega_2 w_{02} + \omega_6 w_{12} + \omega_{10} w_{22} + \omega_9 w_{32} + \omega_1 w_{03} + \omega_5 w_{13} + \omega_9 w_{23} + \omega_{13} w_{33}, \\
b_5 &= \alpha_4 w_{00} + \alpha_8 w_{10} + \alpha_{12} w_{20} + \alpha_{16} w_{30} + \alpha_3 w_{01} + \alpha_7 w_{11} + \alpha_{11} w_{21} + \alpha_{12} w_{31} + \\
&\quad + \alpha_2 w_{02} + \alpha_6 w_{12} + \alpha_7 w_{22} + \alpha_8 w_{32} + \alpha_1 w_{03} + \alpha_2 w_{13} + \alpha_3 w_{23} + \alpha_4 w_{33}, \\
b_6 &= \beta_4 w_{00} + \beta_8 w_{10} + \beta_{12} w_{20} + \beta_{16} w_{30} + \beta_3 w_{01} + \beta_7 w_{11} + \beta_{11} w_{21} + \beta_{15} w_{31} + \\
&\quad + \beta_2 w_{02} + \beta_6 w_{12} + \beta_{10} w_{22} + \beta_{14} w_{32} + \beta_1 w_{03} + \beta_5 w_{13} + \beta_9 w_{23} + \beta_{13} w_{33}, \\
b_7 &= \beta_{13} w_{00} + \beta_{14} w_{10} + \beta_{15} w_{20} + \beta_{16} w_{30} + \beta_9 w_{01} + \beta_{10} w_{11} + \beta_{11} w_{21} + \beta_{12} w_{31} + \\
&\quad + \beta_5 w_{02} + \beta_6 w_{12} + \beta_7 w_{22} + \beta_8 w_{32} + \beta_1 w_{03} + \beta_2 w_{13} + \beta_3 w_{23} + \beta_4 w_{33}, \\
b_8 &= \omega_1 w_{00} + \omega_5 w_{10} + \omega_9 w_{20} + \omega_{13} w_{30} + \omega_2 w_{01} + \omega_6 w_{11} + \omega_{10} w_{21} + \omega_9 w_{31} + \\
&\quad + \omega_3 w_{02} + \omega_7 w_{12} + \omega_6 w_{22} + \omega_5 w_{32} + \omega_4 w_{03} + \omega_3 w_{13} + \omega_2 w_{23} + \omega_1 w_{33}, \\
b_9 &= \alpha_{16} w_{00} + \alpha_{12} w_{10} + \alpha_8 w_{20} + \alpha_4 w_{30} + \alpha_{12} w_{01} + \alpha_{11} w_{11} + \alpha_7 w_{21} + \alpha_3 w_{31} + \\
&\quad + \alpha_8 w_{02} + \alpha_7 w_{12} + \alpha_6 w_{22} + \alpha_2 w_{32} + \alpha_4 w_{03} + \alpha_3 w_{13} + \alpha_2 w_{23} + \alpha_1 w_{33}, \\
b_{10} &= \beta_{16} w_{00} + \beta_{15} w_{10} + \beta_{14} w_{20} + \beta_{13} w_{30} + \beta_{12} w_{01} + \beta_{11} w_{11} + \beta_{10} w_{21} + \beta_9 w_{31} + \\
&\quad + \beta_8 w_{02} + \beta_7 w_{12} + \beta_6 w_{22} + \beta_5 w_{32} + \beta_4 w_{03} + \beta_3 w_{13} + \beta_2 w_{23} + \beta_1 w_{33}, \\
b_{11} &= \beta_{16} w_{00} + \beta_{12} w_{10} + \beta_8 w_{20} + \beta_4 w_{30} + \beta_{15} w_{01} + \beta_{11} w_{11} + \beta_7 w_{21} + \beta_3 w_{31} + \\
&\quad + \beta_{14} w_{02} + \beta_{10} w_{12} + \beta_6 w_{22} + \beta_2 w_{32} + \beta_{13} w_{03} + \beta_9 w_{13} + \beta_5 w_{23} + \beta_1 w_{33}, \\
b_{12} &= \omega_{13} w_{00} + \omega_9 w_{10} + \omega_5 w_{20} + \omega_1 w_{30} + \omega_9 w_{01} + \omega_{10} w_{11} + \omega_6 w_{21} + \omega_2 w_{31} + \\
&\quad + \omega_5 w_{02} + \omega_6 w_{12} + \omega_7 w_{22} + \omega_3 w_{32} + \omega_1 w_{03} + \omega_2 w_{13} + \omega_3 w_{23} + \omega_4 w_{33}, \\
b_{13} &= \alpha_4 w_{00} + \alpha_3 w_{10} + \alpha_2 w_{20} + \alpha_1 w_{30} + \alpha_8 w_{01} + \alpha_7 w_{11} + \alpha_6 w_{21} + \alpha_2 w_{31} + \\
&\quad + \alpha_{12} w_{02} + \alpha_{11} w_{12} + \alpha_7 w_{22} + \alpha_3 w_{32} + \alpha_{16} w_{03} + \alpha_{12} w_{13} + \alpha_8 w_{23} + \alpha_4 w_{33}, \\
b_{14} &= \beta_{13} w_{00} + \beta_9 w_{10} + \beta_5 w_{20} + \beta_1 w_{30} + \beta_{14} w_{01} + \beta_{10} w_{11} + \beta_6 w_{21} + \beta_2 w_{31} + \\
&\quad + \beta_{15} w_{02} + \beta_{11} w_{12} + \beta_7 w_{22} + \beta_3 w_{32} + \beta_{16} w_{03} + \beta_{12} w_{13} + \beta_8 w_{23} + \beta_4 w_{33}, \\
b_{15} &= \beta_4 w_{00} + \beta_3 w_{10} + \beta_2 w_{20} + \beta_1 w_{30} + \beta_8 w_{01} + \beta_7 w_{11} + \beta_6 w_{21} + \beta_5 w_{31} + \\
&\quad + \beta_{12} w_{02} + \beta_{11} w_{12} + \beta_{10} w_{22} + \beta_9 w_{32} + \beta_{16} w_{03} + \beta_{15} w_{13} + \beta_{14} w_{23} + \beta_{13} w_{33}, \\
b_{16} &= \omega_1 w_{00} + \omega_2 w_{10} + \omega_3 w_{20} + \omega_4 w_{30} + \omega_5 w_{01} + \omega_6 w_{11} + \omega_7 w_{21} + \omega_3 w_{31} + \\
&\quad + \omega_9 w_{02} + \omega_{10} w_{12} + \omega_6 w_{22} + \omega_2 w_{32} + \omega_{13} w_{03} + \omega_9 w_{13} + \omega_5 w_{23} + \omega_1 w_{33}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -1,024129; \quad \alpha_2 = 1,853825; \quad \alpha_3 = 0,593967; \quad \alpha_4 = -1,355467; \quad \alpha_6 = -0,757792; \\
\alpha_7 &= -8,383140; \quad \alpha_8 = 7,287788; \quad \alpha_{11} = 21,854539; \quad \alpha_{12} = -14,351214; \quad \alpha_{16} = 8,639624; \\
\beta_1 &= 4,194679; \quad \beta_2 = -19,305697; \quad \beta_3 = 33,329988; \quad \beta_4 = -11,599158; \quad \beta_5 = -4,654407; \\
\beta_6 &= 29,869894; \quad \beta_7 = -54,471278; \quad \beta_8 = 20,758982; \quad \beta_9 = -4,708391; \quad \beta_{10} = -7,464884; \\
\beta_{11} &= 26,299533; \quad \beta_{12} = -15,096534; \quad \beta_{13} = 2,86393; \quad \beta_{14} = -3,017141; \quad \beta_{15} = 1,89211; \quad \beta_{16} = 1,489334; \\
\omega_1 &= -5,203586 \quad \omega_2 = 1,665582 \quad \omega_3 = 9,491196 \quad \omega_4 = -7,152129 \quad \omega_5 = 36,725048 \\
\omega_6 &= -66,177067 \quad \omega_7 = 20,348282 \quad \omega_9 = -56,662471 \quad \omega_{10} = 123,934689 \quad \omega_{13} = 23,180715
\end{aligned} \tag{24}$$

После подстановки выражений (23) в (21) и определенной перегруппировки слагаемых запишем следующее интерполяционное выражение

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \cdot F_{ij}(x, y), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} F_{00}(x, y) &= \alpha_1 S_{01}(x, y) + \beta_1 [S_{02}(x, y) + S_{03}(x, y)] + \omega_4 S_{04}(x, y) + \alpha_4 [S_{05}(x, y) + S_{13}(x, y)] + \\ &+ \beta_4 [S_{06}(x, y) + S_{15}(x, y)] + \beta_{13} [S_{07}(x, y) + S_{14}(x, y)] + \omega_1 [S_{08}(x, y) + S_{16}(x, y)] + \\ &+ \alpha_{16} S_{09}(x, y) + \beta_{16} [S_{10}(x, y) + S_{11}(x, y)] + \omega_{13} S_{12}(x, y), \\ F_{10}(x, y) &= \alpha_2 S_{01}(x, y) + \beta_2 S_{02}(x, y) + \beta_5 S_{03}(x, y) + \omega_5 S_{04}(x, y) + \alpha_8 S_{05}(x, y) + \beta_8 S_{06}(x, y) + \\ &+ \beta_{14} S_{07}(x, y) + \omega_5 S_{08}(x, y) + \alpha_{12} S_{09}(x, y) + \beta_{15} S_{10}(x, y) + \beta_{12} S_{11}(x, y) + \omega_9 S_{12}(x, y) + \\ &+ \alpha_3 S_{13}(x, y) + \beta_9 S_{14}(x, y) + \beta_3 S_{15}(x, y) + \omega_2 S_{16}(x, y), \\ F_{11}(x, y) &= \alpha_6 S_{01}(x, y) + \beta_6 [S_{02}(x, y) + S_{03}(x, y)] + \omega_7 S_{04}(x, y) + \alpha_7 [S_{05}(x, y) + S_{13}(x, y)] + \\ &+ \beta_7 [S_{06}(x, y) + S_{15}(x, y)] + \beta_{10} [S_{07}(x, y) + S_{14}(x, y)] + \omega_6 [S_{08}(x, y) + S_{16}(x, y)] + \\ &+ \alpha_{11} S_{09}(x, y) + \beta_{11} [S_{10}(x, y) + S_{11}(x, y)] + \omega_{10} S_{12}(x, y). \end{aligned} \quad (26)$$

Остальные тринадцать функций можно записать при помощи формул (26) следующим образом

$$\begin{aligned} F_{01}(x, y) &= F_{10}(y, x), \quad F_{02}(x, y) = F_{10}(1-y, x), \quad F_{03}(x, y) = F_{00}(x, 1-y), \quad F_{12}(x, y) = F_{11}(x, 1-y), \\ F_{13}(x, y) &= F_{10}(x, 1-y), \quad F_{20}(x, y) = F_{10}(1-x, y), \quad F_{21}(x, y) = F_{11}(1-x, y), \quad F_{22}(x, y) = F_{11}(1-x, 1-y), \\ F_{23}(x, y) &= F_{10}(1-x, 1-y), \quad F_{30}(x, y) = F_{00}(1-x, y), \quad F_{31}(x, y) = F_{10}(y, 1-x), \quad F_{32}(x, y) = F_{00}(1-y, 1-x), \\ F_{33}(x, y) &= F_{00}(1-x, 1-y). \end{aligned}$$

Частные производные первого и второго порядков по координатам определяются на основании выражения (25). Тогда для дифференциальных операторов, входящих в состав расчетных формул (8) и (10) можно записать такие выражения

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1(w)}{h_1} &\equiv \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\lambda_2(w)}{h_2} \equiv \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{\mu_1(w)}{h_1^2} &\equiv \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\mu_2(w)}{h_2^2} \equiv \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x, y)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (27)$$

Отметим, что по аналогии с результатами работы [1], формулы (17) позволяют вычислять частные производные по координатам первого порядка в областях расположенных непосредственно на границе тела  $x \in [x_0; x_1], y \in [y_0; y_1], x \in [x_{N-1}; x_N], y \in [y_{M-1}; y_M]$  и соседних с ними областях  $x \in [x_1; x_2], y \in [y_1; y_2], x \in [x_{N-2}; x_{N-1}], y \in [y_{M-2}; y_{M-1}]$ . Во всех остальных ячейках пространственной сетки для этой цели нужно пользоваться линейной комбинацией (полу суммой) соответствующих выражений из (27), записанных в соседних областях.

**Численные результаты.** Рассмотрим осесимметричную задачу об определении температурного поля и связанного с ним

нестационарного теормо-упруго-пластического напряженно-деформируемого состояния цилиндрического тела  $r \in [R_0; R_1]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ ,  $x \in [-L; L]$ . Для определения компонентов тензоров напряжения  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_x, \sigma_{r\varphi}$ , деформации  $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_x, \varepsilon_{r\varphi}$  и компонентов вектора скорости перемещений  $v_r, v_x$  на полном шаге по времени использовались расчетные формулы метода покомпонентного расщепления (10). Все искомые величины задавались в форме напряженного двумерного сплайна (25) по координатам  $r, x$ . При этом температура  $T$  в каждый момент времени определялась из решения уравнения теплопроводности (3) при помощи формул (8) с учетом величин  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  ( $i, j = r, \varphi, x$ ), взятых с предыдущего шага по времени.

На первом этапе нагружения цилиндр сжимался силами  $P$  направленными вдоль оси. Выбирались усилия, при которых интенсивность напряжения  $\sigma_i$  превышала предел упругости материала  $\sigma_s$ .

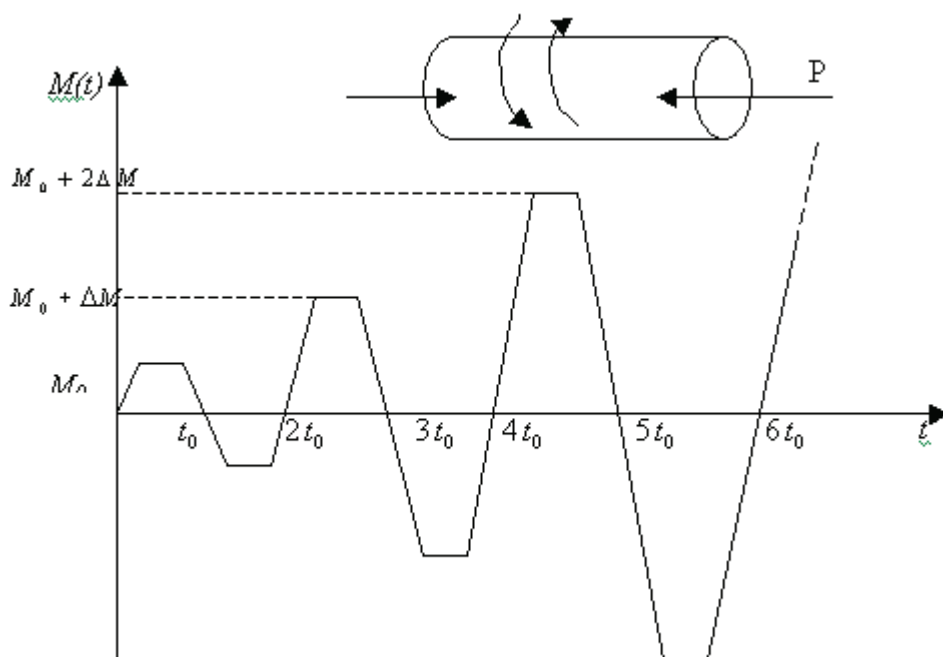


Рисунок 1 - Схема нагружения цилиндра на втором этапе

Здесь  $\sigma_i = \left[ \frac{(\sigma_x - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_x)^2}{2} + 3\tau_{r\varphi}^2 \right]^{1/2}$ . Схема нагружения

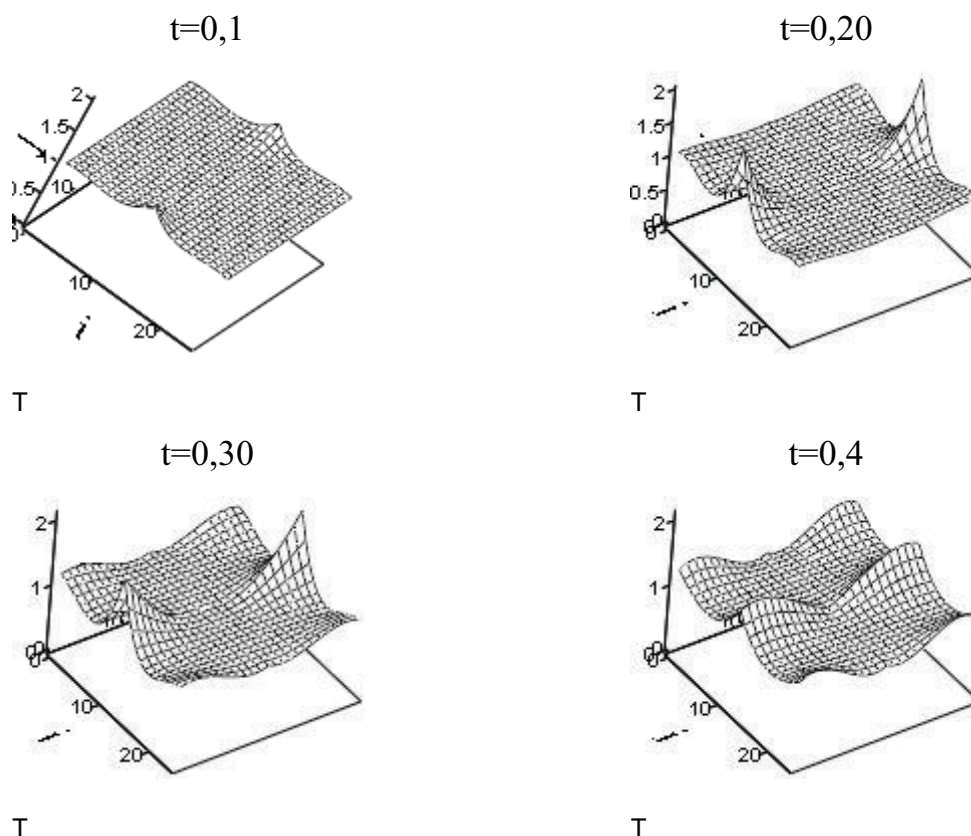
цилиндра крутящим моментом  $M$ , меняющим знак при переходе

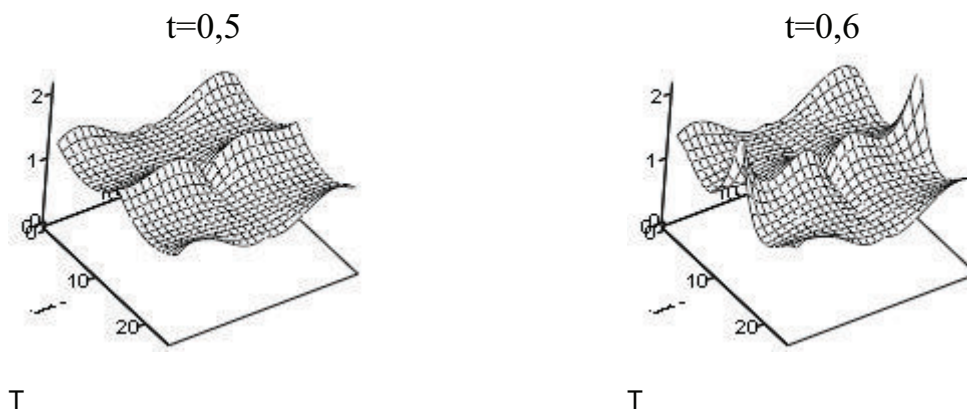
через сечение  $x = 0$  на противоположный, показана на рисунке 1. Начальное распределение температуры -  $T=T_0$ . Начальные условия по всем остальным искомым величинам выбраны нулевыми.

В результате такого нагружения тангенциальное напряжение  $\sigma_{r\varphi}$  в окрестности сечения циклически изменялось. В начале второй стадии нагружения интенсивность напряжений росла, а затем

происходила разгрузка по упругому закону. Далее процесс повторялся. На рисунке 3 показаны распределения температуры ( $T \equiv T/T_0$ ) в сечении  $\varphi = const$  для различных фиксированных моментов времени в окрестности сечения  $x = 0$ . Здесь задавалось  $\tau_* = a\tau/h^2 = 0,05$ , а безразмерное время определялось как  $t = n\tau_*$  ( $n = 0; 1; \dots$ ).

Анализируя приведенные результаты можно констатировать существенное влияние циклически изменяющегося крутящего момента на процесс тепловыделения в окрестности сечения  $x = 0$ .



Рисунок 2 - Распределение температуры в сечении  $r, x$ 

**Выводы.** Получено явное выражение для двухмерного интерполяционного напряженного сплайна. На основании этого разработан эффективный метод численного решения пространственных нестационарных задач теории термоупругопластичности, основанный на сведении исходной трехмерной задачи теории к системе трех последовательно решаемых двухмерных задач, когда неизвестные величины (скорости перемещений, напряжения и деформации) разыскиваются в виде двухмерных напряженных сплайнов, в случае деформирования элемента тела по траекториям деформирования малой кривизны.

Получены рекуррентные формулы неявной схемы метода расщепления для определения скоростей перемещений, напряжений и деформаций, позволяющие получить соответственно третий и четвертый порядок аппроксимации метода по координатам. Получено численное подтверждение того, что итерационная процедура быстро сходится. После трех итераций результаты по  $T$  в точке  $x = 0$ ,  $r = R_1$  отличались менее чем на 1%.

При построении расчетных формул итерационной процедуры, неявной схемы метода расщепления, неизвестные коэффициенты сплайна  $b_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, 16$ ) выражены через значения некоторой функции  $w(x; y)$  в узлах пространственной сетки. Это позволило не только аппроксимировать частные производные первого и второго порядков по координатам в узлах, но и автоматически с высокой точностью получать решение задачи между узлами сетки в произвольной точке.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980.–352 с.



2. Крылова Т.В., Лигун А.А. Асимптотические оценки погрешности приближения функций интерполяционными напряженными сплайнами // Теория приближения.- Днепропетровск, 1994.- С. 63-64.
3. Марчук Г. И. Методы расщепления.-Москва: Наука, 1988. – 263 с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М:Наука, 1971. – 552 с.
5. Стечкин С.В., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. – 248 с.
6. Стеблянюк П.А. К обоснованию метода покомпонентного расщепления для систем уравнений в частных производных // Современ. вопросы теории приближения и комплексного анализа. – К., Ин-т математики АН Украины, 1990. – С. 123 - 127.
7. Стеблянюк П.О. Методи розв’язання багатовимірних динамічних задач МДТТ. - К.: Міністерство освіти України, НМК ВО, 1990. – 139 с.
8. Стеблянюк П.О. Тривимірні динамічні задачі теорії пластичності. – К.: Наукове видання, НМК ВО, 1991. – 63 с.
9. Стеблянюк П.А. Решение неоднородных динамических задач для упругопластических тел экономичными методами. - К.: Министерство образования Украины, НМК ВО, 1992. – 54 с.
10. Стеблянюк П.А. Динамическая задача для ослабленной упругопластической пластины как трехмерного тела // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. – Днепропетровск, Изд-во ДГУ, 1992.-С. 115 - 121.
11. Стеблянюк П.А. Нестационарное напряженно - деформированное состояние пластин и оболочек с концентраторами, моделируемых трехмерным телом // Математичне моделювання. – Днепропетровск, ДДТУ, 1994. – С. 50 - 51.
12. Стеблянюк П.А. Пространственные нестационарные задачи теории термоупругопластичности. – К.: ИМ НАН Украины, 1997. – 273 с.
13. Стеблянюк П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304 с.
14. Стеблянюк П.А. Методы решения нестационарных задач теории пластичности. - Тверь: Приз, 1999. – 424 с.
15. Стеблянюк П.О., Волосова Н.М. Зв’язана задача для попередньо стиснутого циліндра при крутячому моменті, що циклічно змінюється // Системные технологии.–Вып.2(19).–Днепропетровск. Сист.техн., 2001.–С. 94 – 102.
16. Стеблянюк П.А., Еременко П.А. Численное определение нестационарного температурного поля в растущем по известному закону слое // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. Вип. 3/2002 (114). С. 136 – 137.
17. Стеблянюк П.О., Волосова Н.М. Урахування ефекту тепловиділення у двовимірній нестационарній задачі теорії термопластичності для товстостінного циліндру // Вестник Кременчужского государственного политехнического университета. Выпуск 3/2002 (14).-Кременчуг: 2002.-С.133-135.
18. Стеблянюк П.А., Волосова Н.Н., Еременко П.А. Численное определение температурных напряжений в заготовке с использованием двумерной модели растущего цилиндрического тела// V Miedzynarodowa



conferencja nowe technologie w metalurgii i inzynirii, Czestohovwa, 2004, GZESC1, p. 251-253.

19. Стеблянюк П.А. Анализ вычислительной эффективности приближенных методов при исследовании нестационарного напряженно-деформированного состояния тел с использованием двумерных сплайнов//Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла: Збірник наукових праць/ ДНУ.- Дніпропетровськ, 2005.- Вип. 7.- С 73-87.
20. Стеблянюк П.А. Применение двумерного кубического сплайна для описания геометрических объектов// Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 3 (44) .- Дніпропетровськ, 2006.- С. -107-111.
21. Стеблянюк П.О. Застосування двовимірного напруженого сплайну в задачах механіки // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 5 (46) .- Дніпропетровськ, 2006.- С. - 17-26.
22. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность.–Киев:Наукова думка,1987.–264 с.
23. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Новосибирск: Наука, 1967. - 195 с.
24. Яненко Н.Н. Введение в разностные методы математической физики. - Новосибирск: Изд. НГУ, 1968. - Ч. 1. - 192 с.
25. Steblyanko P.A. The method of decomposition in the non-stationary space problems of the theory of plasticity.-К.:SMC HE, 2000.-159 p.
26. Steblyanko P. A., Volosova N. N. Non-stationary 2D and 3D coupled problems of the theory of thermoplasticity //System technologies. – 2(13).– Dnepropetrovsk, 2001. – P. 174 – 181.
27. Steblyanko P. A. Spline-approximation of solution of system of nonlinear PDE//System technologies.–2(13). – Dnepropetrovsk, 2001.–P.181– 189.
28. Steblyanko P. A. The schemes of abnormally high accuracy solution of non-stationary problems of theory of thermo-elastic-plasticity for plates and shells// The Fifth International Congress on Thermal Stresses and Related Topics. Vol.1 – Virginia Politechn. Institute and State University Blacksburg, Virginia, USA. – June 8-11, 2003.-P. 231–234.
29. Steblyanko P.A. The method of solving of non-stationary coupled problems of the theory thermal-plasticity for the rotation shells // XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Warsaw, Poland. – 15-21 August 2004. – P. 208.
30. Shevchenko Yu.N., Steblyanko P. A. The non-stationary 2D and 3D coupled problems of thermal-elastic-plasticity// TS2005-6th International Congress on Thermal Stresses Related Topics, May 26-29, 2005. Vienna, Austria. - P. 231-234.

Получено 18.06.2007 г.