## МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ

В.И. Гнитько, Е.В. Еселева

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ

**Введение.** Исследование динамического взаимодействия упругих конструкций с жидкостью представляет достаточно сложную проблему, решению которой посвящена обширная литература. Актуальность данной проблемы связана с широким применением конструкций, содержащих полости с жидкостью, в технике. В качестве примеров можно привести цистерны для перевозки жидкостей, емкости для хранения нефтепродуктов, резервуары, используемые на атомных электростанциях и т. д.

Широкое распространение при решении задач динамики ограниченного объема жидкости получил вариационный метод [1-3], который приводит к приближенным решениям в аналитическом виде со свойствами слабой сходимости. К проблемам, возникающим при реализации данного метода, относятся выбор системы координатных функций, вопросы устойчивости алгоритма Ритца и др.

Другая группа методов исследования рассматриваемых задач основана на дискретизации основных параметров задачи. К числу таких методов относятся, в частности, метод конечных элементов (МКЭ) [4-5] и метод граничных элементов (МГЭ) [6-7]. Основное достоинство этих подходов состоит в универсальности их алгоритмов по отношению к геометрии конструкции и полости, заполненной жидкостью. Интенсивно разрабатываемый в последние десятилетия МГЭ имеет определенные преимущества: уравнения МГЭ содержат значения искомых функций и их производных только на границе области, занятой жидкостью, что позволяет уменьшить на единицу размерность задачи.

В данной работе предлагается подход, основанный на использовании метода граничных интегральных уравнений, для решения задач динамики оболочек вращения, заполненных жидкостью.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую упругую оболочку вращения, частично заполненную жидкостью. Обозначим смачиваемую поверхность оболочки через $S_1$. Введем связанную с оболочкой систему координат $0xyz$, в которой свободная поверхность жидкости $S_0$ в невозмущенном состоянии совпадает с плоскостью $x0y$, а вектор сил тяжести противоположен по направлению оси $0z$. Предположим, что жидкость идеальная, несжимаемая, и ее течение является безвихревым. Эти допущения позволяют считать возмущенное движение жидкости потенциальным с потенциалом скоростей $j(x,y,z,t)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа.

Уравнение колебаний жидкости в линейном приближении определяется соотношениями [2]

$$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} \varphi\,,$$

$$P = -\rho(\dot{\varphi} + gz) + P_0\,, \tag{1}$$

где $P$ – гидродинамическое давление жидкости, $\rho$ – плотность жидкости, $g$ – ускорение поля массовых сил; $\boldsymbol{V}$ – вектор скоростей движения жидкости; $z = H$ – координата невозмущенной свободной поверхности жидкости

Уравнение колебаний упругой оболочки с жидкостью запишем в векторном виде

$$\boldsymbol{LU} + M\ddot{\boldsymbol{U}} = P + Q \tag{2}$$

где $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ – операторы упругих и массовых сил в оболочке; $\boldsymbol{U}=(u_1, u_2, w)$ – вектор-функция перемещений срединной поверхности оболочки; $\boldsymbol{Q}(t)$ – вектор внешней поверхностной нагрузки.

Кинематическое граничное условие безотрывного движения жидкости на смачиваемой поверхности оболочки $S_1$:

$$\boldsymbol{Vn} = \dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{n} = \dot{w} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{n}$ – внешняя единичная нормаль к смоченной поверхности оболочки, $w$ – нормальная составляющая перемещений оболочки.

Динамическое граничное условие на возмущенной свободной поверхности жидкости $S_0$ при $z = H + \zeta$ после линеаризации принимает вид

$$P - \rho g \zeta = 0 \tag{4}$$

где $z = \zeta(x, y, t)$ – уравнение возмущенной поверхности жидкости.

Гидродинамическую задачу (1)–(4) можно свести к задаче определения одной неизвестной функции $\varphi(x,y,z,t)$. Будем искать потенциал скоростей в виде суммы

 ISSN 1562-9945

$$\varphi(x,y,z,t)=\varphi_1(x,y,z,t)+\varphi_2(x,y,z,t)$$

Для потенциала $\varphi_1$ сформулируем следующую краевую задачу

$$\nabla^2\varphi_1=0\,,$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\dot{w}\,,\;\; P_S\in S_1\,, \tag{5}$$
$$\dot{\varphi}_1=0\,,\;\; P_S\in S_0\,.$$

Здесь $P_S$ – точка, принадлежащая поверхности $S = S_1 \cup S_0$.

Будем искать решение задачи (5) в виде разложения по собственным формам $u_k(x,y,z)$ колебаний оболочки в вакууме

$$U(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{m}u_k(x,y,z)c_k(t)\,, \tag{6}$$

$$\varphi_1(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_{1k}(x,y,z)\dot{c}_k(t)\,, \tag{7}$$

где $c_k(t)$ – неизвестные коэффициенты. Отметим, что для собственных векторов справедливы следующие соотношения:

$$\boldsymbol{L}u_k=\omega_k^2\boldsymbol{M}u_k\;\;,\;\;(\boldsymbol{M}u_k,u_j)=\delta_{kj}\;, \tag{8}$$

где $\omega_k$ – $k$-я частота собственных колебаний оболочки в вакууме.

Для определения $\varphi_{1k}$ имеем следующие соотношения

$$\nabla^2\varphi_{1k}=0\,,$$
$$\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n}=w\,,\;\; P_S\in S_1\,, \tag{9}$$
$$\dot{\varphi}_{1k}=0\,,\;\; P_S\in S_0\,.$$

Для потенциала $\varphi_2$ сформулируем следующую краевую задачу

$$\nabla^2\varphi_2=0\,,$$
$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=0\,,\;\; P_S\in S_1\,, \tag{10}$$
$$\ddot{\varphi}_2+g\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=0\,,\;\; P_S\in S_0\,.$$

Эта задача описывает колебания ограниченного объема жидкости в жестком сосуде. Предполагая, что $\varphi_2$ меняется во времени по гармоническому закону $\varphi_2(x,y,z,t)=\tilde{\varphi}_2(x,y,z)\cos(\kappa t+\varepsilon)$, приходим к задаче о собственных колебаниях жидкости в жестком сосуде

$$\nabla^2\tilde{\varphi}_2=0\,,$$
$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial n}=0\,,\;\; P_S\in S_1\,, \tag{11}$$
$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial n}=\frac{\kappa^2}{g}\tilde{\varphi}\,,\;\; P_S\in S_0\,.$$

Ее решение определяет ряд собственных чисел $\kappa_k$ и соответствующих им собственных функций $\varphi_{2k}$.

Решение краевых задач (9), (11) строится на основе метода граничных интегральных уравнений. Так как объектом исследования являются оболочки вращения, функция потенциала представлена разложением в ряды Фурье по окружной координате. В работах [8], [9] получены определяющие интегральные уравнения для каждой из гармоник и изложен алгоритм их численного решения.

Определив $\varphi_{2k}$, будем искать $\varphi_2$ в виде

$$\varphi_2(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{m} d_k(t)\,\varphi_{2k}(x,y,z)\,. \tag{12}$$

Подставляя разложение (12) в уравнения (10), потребуем, чтобы условие на свободной поверхности жидкости было выполнено. Удовлетворение этому условию приводит к системе дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $d_k$

$$\ddot{d}_k+\kappa_k^2 d_k=0,\quad k=1,2,...,m\,.$$

Решение этой системы имеет вид

$$d_k(t)=\cos(\kappa_k t+\varepsilon),\quad k=1,2,...,m\,. \tag{13}$$

Гидродинамическое давление определим, подставив в уравнение (1) соотношения (7), (12), (13)

$$P=-\rho\left(\sum_{k=1}^{m}\ddot{c}_k(t)\varphi_{1k}+\sum_{k=1}^{m}\kappa_k\sin(\kappa_k t+\varepsilon)\varphi_{2k}+gz\right). \tag{13}$$

Далее подставим разложения (6), (13) в уравнение движения оболочки (2) и умножим его скалярно на собственный вектор $u_j$. Учитывая свойства (8), приходим к системе дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов $c_k$

$$\omega_j^2\delta_{kj}c_j+\delta_{kj}\ddot{c}_j=-\rho\sum_{k=1}^{m}\ddot{c}_k\varphi_{1k}u_j-\rho\sum_{k=1}^{m}\kappa_k\sin(\kappa_k t+\varepsilon)\varphi_{2k}u_j-\rho g z u_j+Qu_j\,,\quad j=1,m \tag{14}$$

Для решения этой системы используется метод Рунге-Кутта. Собственные частоты и формы колебаний оболочки в вакууме определяются методом конечных элементов.

В качестве примера рассмотрена задача о колебаниях полусферической оболочки, заполненной жидкостью, под действием равномерно распределенного давления $Q(t) = Q_0T(t)$, где $Q_0 = 10^7$ Па, $T(t) = \exp(-t/\tau)$ , $\tau = 14.2\mathrm{E}^{-6}$ с. (Рис.1). Параметры оболочки

 ISSN 1562-9945

следующие: радиус $R$=5.08 м, толщина $h$=0.0254 м, модуль упругости $E=0.7\cdot10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu$=0.3, плотность материала $\rho_0$=2770 кг/м$^3$. Плотность жидкости $\rho$=1000 кг/м$^3$. Условия закрепления – шарнирное опирание по контуру оболочки.

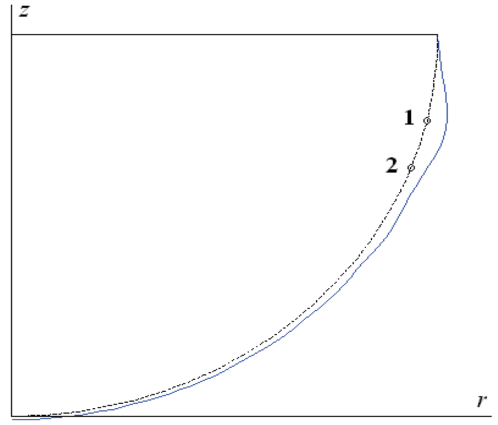


Рисунок 1 - Деформированное состояние оболочки

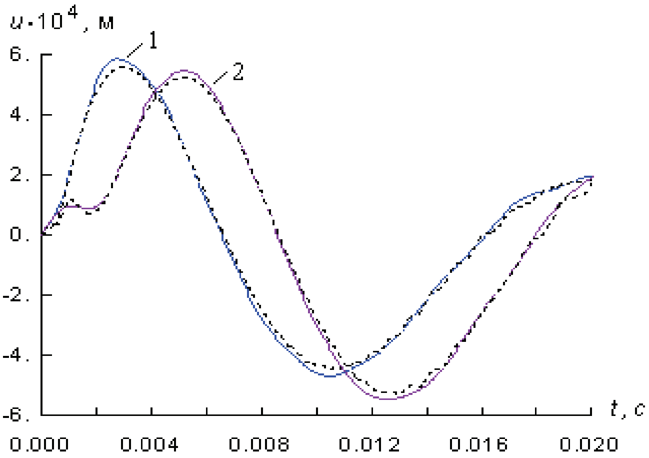


Рисунок 2 - Радиальные перемещения оболочки, заполненной жидкостью

На рис.2 приведены графики изменения во времени радиальных перемещений в узлах 1 ($z_1$ = 4.582 м) и 2 ($z_2$ = 4.187 м) оболочки с жидкостью: сплошные линии – вариант расчета по предложенной методике; пунктирные линии показывают данные расчета по программному комплексу, реализующему метод конечных элементов. Хорошее согласование результатов свидетельствует о достоверности метода и алгоритма решения задачи. На рис. 3, 4 приведены зависимости от времени напряжений на поверхности оболочки, взаимодействующей с жидкостью (узел 1), и гидродинамического давления.

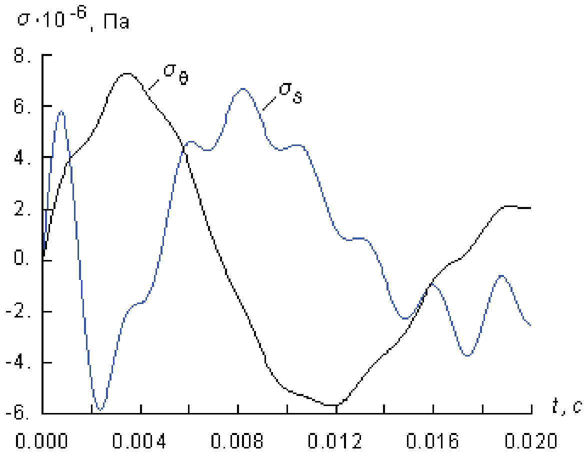


Рисунок 3 - Напряжения в оболочке


Рисунок 4 - Гидродинамическое давление

Выводы. На основе метода граничных интегральных уравнений предложен подход к решению задач определения напряженного и деформированного состояния оболочек вращения, частично заполненных жидкостью, при динамическом нагружении. В дальнейшем разработанный подход будет использован при исследовании задач динамики тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, находящихся под воздействием различных нестационарных (импульсных, сейсмических и.т.д.) нагрузок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440 с.
2. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наукова думка, 1990. – 296 с.
3. Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Дружинина Г.З., Либин Э.Е. Введение в динамику сосудов с жидкостью. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977.–144 с.
4. Григорьев В.Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. (Труды III семинара). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978.– С. 55–60.
5. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // Механика твёрдого тела. – 1998. – № 5. – С. 166–174.
6. Бреббия К., Теллес Ж.,. Вроубел Л. Методы граничных элементов.– М.: Мир, 1987. – 524 с.
7. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. К теории собственных колебаний конструкций, содержащих жидкость // Доп. НАН України. – 2001. – № 10. – С. 61–65.
8. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью // Пробл. машиностроения. – 2006. – Т. 9, № 1. – С. 58–68.
9. Еселева Е.В., Науменко В.В., Стрельникова Е.А. Метод интегральных уравнений в задаче о колебаниях жидкости в жесткой оболочке // Вестник ХНТУ. – 2006.– Т. 25, № 2.– С 198–202.

Получено 15.06.2007 г.