УДК 519.633.2

А.Б. Кулик

КОЛИВАННЯ РІДИНИ В РУХОМІЙ ПОРОЖНИНІ З ЖОРСТКИМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

Актуальність теми. Для зменшення впливу коливання вільної поверхні рідини на стійкість руху системи “тіло – рідина” на практиці застосовують різного роду конструктивні пристрої. Широке розповсюдження отримали пристрої у вигляді жорстких або пружних ребер – перегородок [1-2]. Перегородки здійснюють істотний вплив на динамічні характеристики рідини [3-4]. Було встановлено, що зменшення коливання рідини обумовлено тим, що при визначених режимах взаємодії жорстких елементів з рідиною спостерігається збільшення швидкості потоку відносно перегородок, що призводить до більш інтенсивного розсіювання енергії.

В даній роботі викладені результати теоретичних дослідів розв’язку задачі, що пов’язана зі знаходженням лінії, які характеризуються тим, що для довільного моменту часу t дотична до цих ліній в будь –якій точці співпадає за напрямом зі швидкістю. Наводиться конструктивне зображення розв’язку задачі. Проілюстровані векторні лінії для даної постановки задачі.

Лінії струму для задачі (3). Нехай в полі масових сил знаходиться нерухомий бак, заповнений ідеальною і нестискуваною рідиною з густиною p (не обмежуючи загальності, надалі будемо вважати $p=1$). Розглянемо розріз баку, який є перпендикулярним до площини Oz. Обмежимось розглядом антисиметричних коливань рідини в площині Oxy.

Розглянемо спочатку випадок, коли ребра відсутні.

Нехай $\Omega=\{(x,y):\ \ -1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, Γ -границя.

$$\Gamma_0=\{(x,y):\ \ -1\le x\le 1, y=1\},\ \Gamma_1=\Gamma\setminus\Gamma_0.$$

Потенціал $\Phi(x,y)$ є розв’язком наступної крайової задачі

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \Phi(0,y) = 0, \\ \left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad \Phi\Big|_{\Gamma_0} = u(x) \end{cases} \tag{1}$$

В цьому випадку можна знайти ряд частинних розв'язків системи (1)

$$\Phi_n(x,y) = c_n \cosh\frac{\pi(1+2n)y}{2}\sin\frac{\pi(1+2n)x}{2},$$

де

$$c_n = 2\int_0^1 u(\xi)\frac{\sin\dfrac{\pi(1+2n)\xi}{2}}{\cosh\dfrac{\pi(1+2n)}{2}}d\xi .$$

Неважко переконатися, що ліній току для задачі (1) мають вигляд:

$$\sinh\frac{\pi(1+2n)y}{2}\cos\frac{\pi(1+2n)x}{2} = C, \tag{2}$$

де C – довільна константа.

Зокрема, для першого частинного розв'язку криві (2) мають вигляд

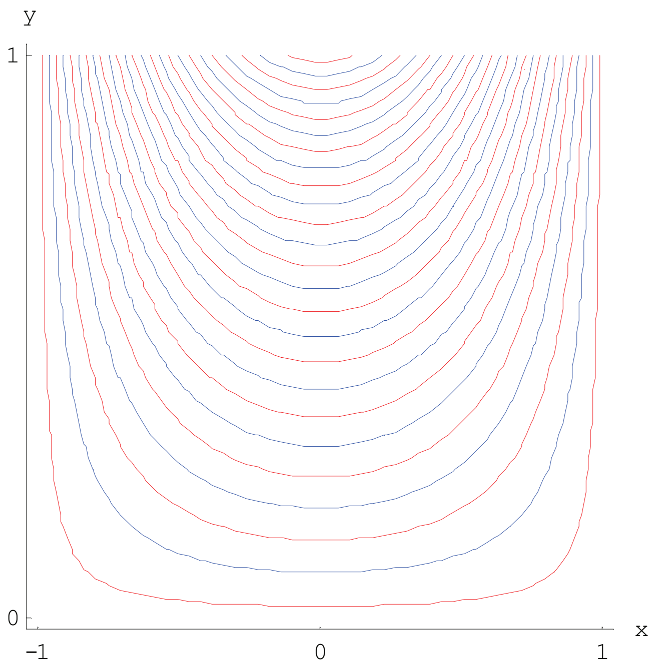

Рисунок 1

Розглянемо квадрат з повздовжніми ребрами довжини a, встановленими на висоті $y=\frac{1}{2}$ з обох сторін висотою 1. Задачу **(1)** потрібно розглядати в наступній області $\Omega^{(a)}=\{(x,y):-1\le x\le 1,\, 0\le y\le 1\}$ з границею Γ та з двома ребрами довжини a, встановлених на висоті $y=\frac{1}{2}$.

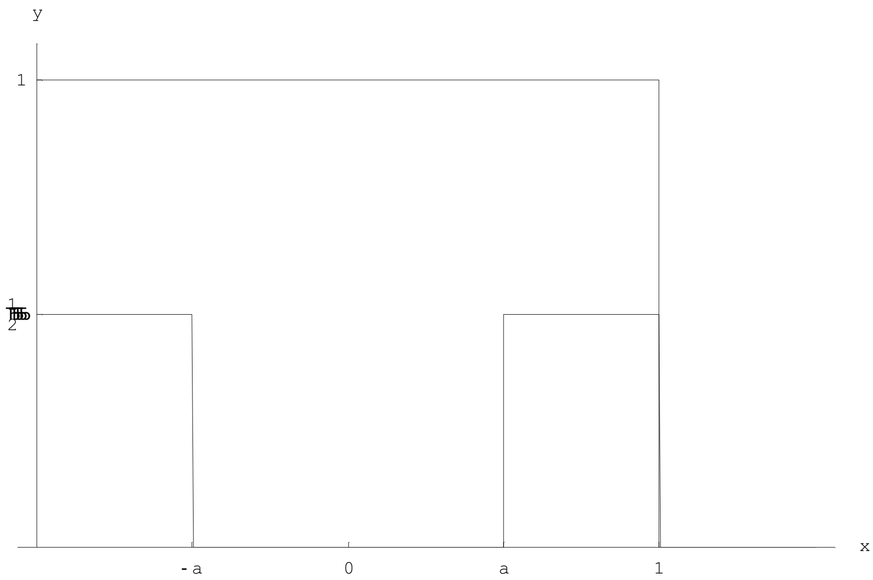

Рисунок 2

Визначимо $\Gamma_0=\{(x,y):\quad -1\le x\le 1,\, y=1\}$,

$\Omega_1=\{(x,y):-1\le x\le 1, \frac{1}{2}\le y\le 1\}$, $\Omega_2=\{x=(x,y):-1\le x\le 1,\, 0\le y\le \frac{1}{2}\}$ і

нехай $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ наступні відрізки $\gamma_1=\{(x,y):\quad -1\le x\le -a,\, y=\frac{1}{2}\}$,

$$\gamma_2=\{(x,y):\quad a\le x\le 1,\, y=\frac{1}{2}\},\quad \gamma=\{(x,y):\quad -a\le x\le a,\, y=\frac{1}{2}\}.$$

Ми визначимо невідому функцію $\varphi(x)$ як нормальну похідну потенціалу на γ. Тоді на $\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma$ нормальна похідна від Φ є визначеною і

$$\varphi(x)=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=\frac{1}{2}}=\begin{cases}0, & x\in\gamma_1\cup\gamma_2,\\ \varphi(x), & x\in\gamma.\end{cases}$$

Зауважимо, що потенціал Φ є розв'язком наступної граничної задачі

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0, \quad x \in \Omega^{(a)} \setminus \gamma_1 \cup \gamma_2, \\ \Phi = u(x), \quad x \in \Gamma_0, \quad \left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad \Phi(0,y) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Частинні розв'язки потенціалу $\Phi(x,y)$ в областях Ω_1 і Ω_2 будуть мати вигляд

$$\Phi_n = \left[a_n \cosh\frac{\pi(1+2n)}{2}\left(\frac{1}{2} - y\right) + b_n \sinh\frac{\pi(1+2n)}{2}(1-y)\right] \sin\frac{\pi(1+2n)x}{2} \text{ в } \Omega_1 \tag{4}$$

$$\Phi_n(x,y) = c_n \cosh\frac{\pi(1+2n)y}{2} \sin\frac{\pi(1+2n)x}{2} \text{ в } \Omega_2 \tag{5}$$

де

$$a_n = 2\int_0^1 u(\xi) \frac{\cos\dfrac{\pi(1+2n)}{2}\xi}{\cosh\dfrac{\pi(1+2n)}{4}} d\xi , \tag{6}$$

$$b_n = -\frac{2}{a}\int_0^1 \psi(\xi) \frac{U_{1+2n}\left(\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\pi a}{2}\sin^2\dfrac{\pi\xi}{2}}\right)}{(1+2n)\cosh\dfrac{\pi(1+2n)}{4}} d\xi , \tag{7}$$

$$c_n = \frac{2}{a}\int_0^1 \psi(\xi)\left(\tanh\frac{\pi(1+2n)}{4} + 1\right) \frac{U_{1+2n}\left(\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\pi a}{2}\sin^2\dfrac{\pi\xi}{2}}\right)}{1+2n} d\xi ,$$

$$\psi(\tau) = \widetilde{\varphi}\left(\frac{2}{\pi}\arcsin(\sin\frac{\pi a}{2}\sin\pi\tau)\right), \quad \varphi(\xi) = \sqrt{\frac{1-\sin^2\dfrac{\pi\xi}{2}}{\sin^2\dfrac{\pi a}{2} - \sin^2\dfrac{\pi\xi}{2}}}\,\widetilde{\varphi}(\xi) ,$$

$U_k(z)$ - многочлени Чебишова II –го роду.

Лінії току для функції $\Phi(x,y)$ в області Ω_2 співпадають з (2). Лінії току в області Ω_1 мають наступний вигляд

$$\cos\frac{\pi(1+2n)x}{2}\left[a_n \sinh\frac{\pi(1+2n)}{2}\left(\frac{1}{2} - y\right) + b_n \cosh\frac{\pi(1+2n)}{2}(1-y)\right] = C$$

Таким чином,

Теорема: Лінії тока для задачі (3) мають вигляд

$$\cos\frac{\pi(1+2n)x}{2}\left[a_n \sinh\frac{\pi(1+2n)}{2}\left(\frac{1}{2} - y\right) + b_n \cosh\frac{\pi(1+2n)}{2}(1-y)\right] = C_1$$

в області Ω_1,

$$\sinh\frac{\pi(1+2n)y}{2}\cos\frac{\pi(1+2n)x}{2} = C \text{ в області } \Omega_2 ,$$

ISSN 1562-9945

де a_n, b_n визначаються відповідно з (6), (7), C_1, C_2 -довільні сталі.

Ці лінії току не міняються з часом, і вони є траєкторіями частинок рідини.

На рис 3. проілюстровані сімейство кривих для задачі (3) для першого частинного розв’язку.

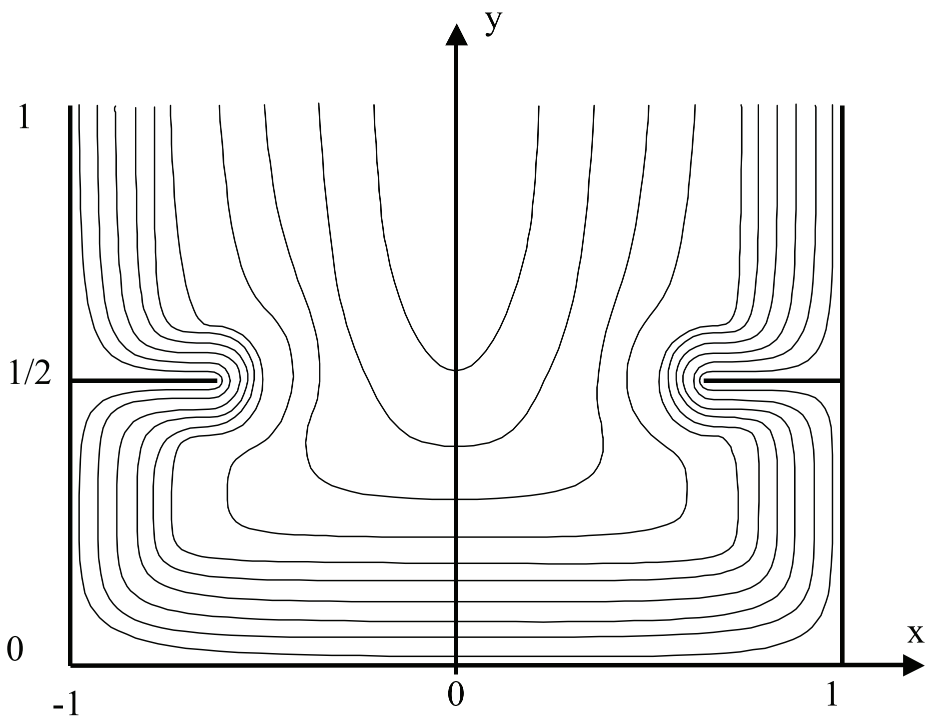

Рисунок 3

ЛІТЕРАТУРА

1. Троценко В.А. Колебания жидкости в подвижных емкостях с перегородками –Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006. –320с.
2. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость –К.: Наукова думка, 1990. – 296с.
3. И.Б. Богоряд, Г.З. Дружинина О демпфировании колебаний вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде с кольцевым ребром. – Прикладная механика, Т.21, №2, 1985 с.126-128
4. Gavrilyuk I.P., Kulyk A.B., Makarov V.L. Integral equations of the linear sloshing in an infinite chute and their discretization// Computational methods in applied mathematics –2001. #1. pp. 39-61.

Получено 15.06.2007 г.