УДК 539.3

С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА СЛОИСТОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Среди широкого круга вопросов, непосредственно связанных с постановкой и решением задач о движущихся нагрузках, важными в практическом и теоретическом смысле являются вопросы исследования распространения волн в упругих системах плоскопараллельных слоев с различными упругими свойствами. В частности, представляют значительный интерес задачи о воздействии подвижной нагрузки на двухслойное полупространство, состоящее из упругого слоя и подстилающего его упругого полупространства. Задачи о поведении двухслойного упругого полупространства изучались как в точной постановке, так и с использованием различных приближенных моделей двухслойной упругой среды.

В данной работе рассмотрены один из методов решения плоской задачи о воздействии подвижной нагрузки на двухслойное полупространство, состоящее из пластины и подстилающего ее предварительно напряженного полупространства и некоторые результаты.

§ 1. Для решения задачи воспользуемся соотношениями линеаризированной теории упругости сжимаемых тел с начальными напряжениями [1].

Общая постановка плоских задач об установившемся движении упругого двухслойного полупространства, состоящего из пластины, уравнения движения которой записываются с учетом сдвига и инерции вращения [2], и подстилающего ее, подверженного предварительному однородному деформированию полупространства из сжимаемого или несжимаемого материалов при подвижной нагрузке, включает [3,4]:

уравнения движения пластины

$$u_1 \frac{d^2 u}{dy_1^2} - \phi = P_1;$$

$$и_3 \frac{d^2 w}{dy_1^2} - 2\kappa h G_1 \frac{dц}{dy_1} - q = P_2; \qquad (1)$$

$$и_2 \frac{d^2 ц}{dy_1^2} + 2\kappa G_1 \left(\frac{dw}{dy_1} - ц \right) - ф = 0;$$

где

$$и_1 = 2h\left(\frac{2G_1}{1-н_1} - \Im_1 \mathrm{v}^2 \right); \;\; и_2 = \frac{2h^2}{3}\left(\frac{2G_1}{1-н_1} - \times_0 \Im_1 \mathrm{v}^2 \right); \;\; и_3 = 2h\left(\equiv G_1 - \Im_1 \mathrm{v}^2 \right); (2)$$

уравнения движения полупространства

$$\left(з_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right)\left(з_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frown^{(j)} = 0; \qquad j = 1,2; \qquad (3)$$

и условия контакта между пластиной и полупространством при $y_2 = -h$:

жесткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = ф; \qquad \tilde{Q}_{22} = q; \qquad u_2 = w; \qquad u_1 = u + hц; \qquad (4)$$

и нежесткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \qquad ф = 0; \qquad \tilde{Q}_{22} = q; \qquad u_2 = w. \qquad (5)$$

Функции $з_j$ в уравнениях движения (3) определяются из уравнения

$$з^4 + Aз^2 + A_1 = 0. \qquad (6)$$

Коэффициенты A и A_1 в случае сжимаемого тела определяются из выражений

$$\begin{aligned} A\tilde{ш}_{2112}\tilde{ш}_{2222} &= \tilde{ш}_{2112}(\tilde{ш}_{1221} - \tilde{c}\mathrm{v}^2) + \tilde{ш}_{2222}(\tilde{ш}_{1111} - \tilde{c}\mathrm{v}^2) - (\tilde{ш}_{1122} + \tilde{ш}_{1212})^2; \\ A_1\tilde{ш}_{2112}\tilde{ш}_{2222} &= (\tilde{ш}_{1221} - \tilde{c}\mathrm{v}^2)(\tilde{ш}_{1111} - \tilde{c}\mathrm{v}^2); \end{aligned} \qquad (7)$$

а в случае несжимаемого тела из выражений

$$\begin{aligned} A\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2\tilde{\kappa}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2(\tilde{\kappa}_{1111} - \tilde{c}\mathrm{v}^2) - 2\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}(\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}); \\ A_1\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2(\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{c}\mathrm{v}^2). \end{aligned} \qquad (8)$$

В формулах (1)-(8) введены следующие обозначения: $G_1, н_1, c_1$ - соответственно модуль сдвига, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины; u и w - перемещения срединной плоскости пластины; κ - сдвиговый коэффициент Тимошенко; $ц$ - угол поворота поперечного сечения; ∂_0 - различительная константа, принимающая значение 1 или 0 в зависимости от того, учитывается или пренебрегается инерцией вращения при выводе уравнений (1); P_1, P_2 и $ф$, q - соответственно касательные и нормальные напряжения на

 ISSN 1562-9945

свободной поверхности пластины и на поверхности раздела пластины и полупространства; $\tilde{c}$ - плотность материала полупространства в начальном деформированном состоянии; u_1 и u_2 - составляющие вектора перемещений в полупространстве; $\tilde{Q}_{ij}$ - составляющие тензора напряжений, отнесенные к единице площади в начальном деформированном состоянии; $\tilde{ш}_{ijбв}$, $\tilde{\kappa}_{ijбв}$, $\tilde{q}_{ij}$ - компоненты тензоров, зависящих от формы упругого потенциала, отнесенные к единице площади в начальном деформированном состоянии.

Из уравнений (1) и (4) в случае жесткого контакта и (1) и (5) в случае нежесткого контакта, исключая функции *u, w*, *ф* и *q*, получим систему граничных условий, которая для жесткого и нежесткого контакта имеет общий вид

$$
\begin{gathered}
\partial u_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}(u_1 - hц) - \tilde{Q}_{21} = \partial P_1; \\
u_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2} - 2\kappa h G_1 \frac{\partial ц}{\partial y_1} - \tilde{Q}_{22} = P_2; \\
u_2 \frac{\partial^2 ц}{\partial y_1^2} + 2\kappa G_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} - ц \right) - \partial \tilde{Q}_{21} = 0;
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где $\partial = 1$ в случае жесткого контакта и $\partial = 0$ в случае нежесткого контакта.

Таким образом, при использовании общих решений плоских динамических задач линеаризированной теории рассматриваемые задачи сводятся к краевым задачам для функций $ч^{(j)}$ $(j = 1,2)$ и $ц$ в случае равных корней и для функций $ч$ и $ц$ в случае неравных корней $\left(ч^{(1)} = (\tilde{ш}_{1122} + \tilde{ш}_{1212})\, ч; \quad ч^{(2)} = 0 \right)$.

§ 2. Поставленные краевые задачи решаются с помощью преобразования Фурье по переменной y_1. Фундаментальные решения в пространстве изображений Фурье получены при различных скоростях движения нагрузки и условиях контакта между пластиной и полупространством для равных и неравных корней уравнения (6).

Вычисление интегралов обращения при переходе к оригиналам в выражениях для напряжений, скоростей перемещений в полупространстве (перемещения в данном случае определяются с точностью до аддитивной постоянной) и изгибающего момента в

ISSN 1562-9945

пластине зависит от скорости движения нагрузки. В зависимости от скорости движения нагрузки знаменатель в интегралах обращения может иметь действительные положительные корни, а может и не иметь. Если ни один корень не лежит на действительной оси, то интегралы обращения не имеют особенностей и их можно вычислить непосредственно с помощью таблиц. При наличии неравных действительных положительных корней знаменателя интегралы вдоль контура интегрирования от $-\infty + i\varepsilon$ до $+\infty + i\varepsilon$ можно заменить суммой главного значения интеграла и суммой всех вычетов, умноженной на $(-i\pi)$.

§ 3. На основании полученных результатов проведено численное исследование влияния начальных напряжений на значение критических скоростей движения нагрузки и на напряженно-деформированное состояние двухслойной среды. Подробно рассмотрены случаи сжимаемого и несжимаемого материалов соответственно с упругим потенциалом гармонического типа и упругим потенциалом типа Бартенева-Хазановича.

Влияние начальных деформаций на напряжения, скорости перемещений в полупространстве и изгибающий момент в пластине исследовалось при различных скоростях движения нагрузки (дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой) и условиях контакта пластины и полупространства.

В качестве примера рассмотрена нормальная сосредоточенная нагрузка. Предполагалось также, что начальное деформированное состояние является плоским и поверхностная нагрузка отсутствует.

В частности исследовалось, как влияет учет инерции вращения при выводе уравнений движения пластины на параметры напряженно-деформированного состояния рассматриваемой модели слоистой среды.

На рис. 1 (а - жесткий контакт, б - нежесткий контакт) показано влияние учета инерции вращения при различных скоростях движения нагрузки и начальных деформациях на значение составляющей напряжения $\tilde{Q}_{22}$ в точке $y_1 = -\lambda_1 h$; $y_2 = -2h/\lambda_2$ для сжимаемого материала. Кривая 1 на рис. 1 и 2 соответствует скорости движения нагрузки $\mathrm{v}^2 = 0{,}1c_s^2$, кривая 2 – скорости $\mathrm{v}^2 = 0{,}2c_s^2$, кривая 3 - скорости $\mathrm{v}^2 = 0{,}3c_s^2$, кривая 4 – скорости $\mathrm{v}^2 = 0{,}4c_s^2$.

 ISSN 1562-9945

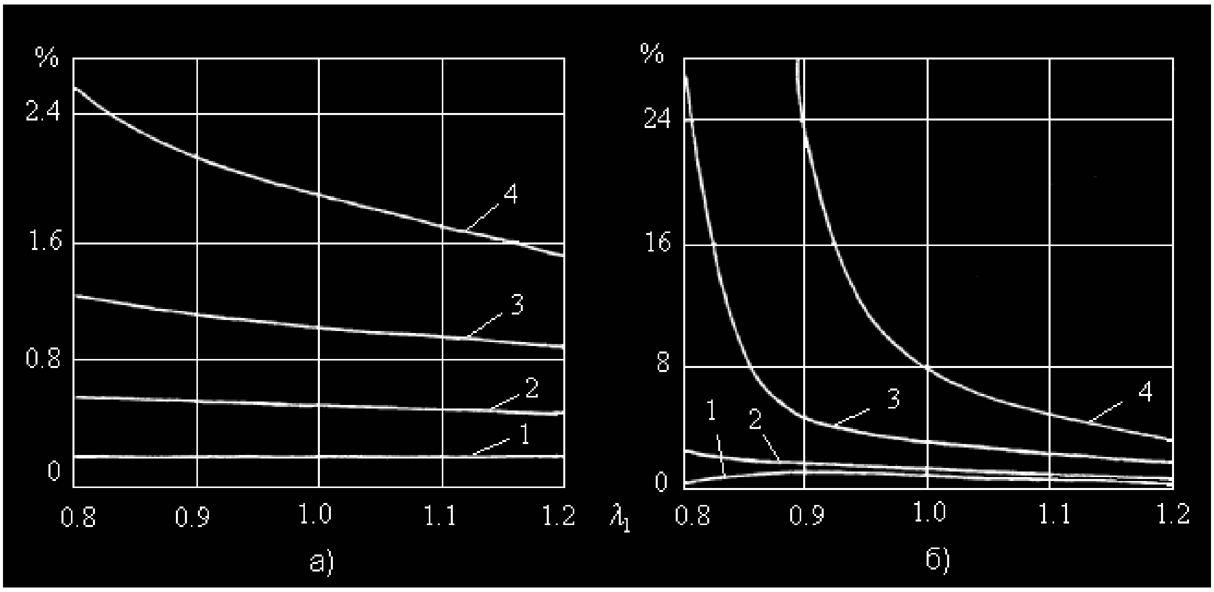

Рисунок 1

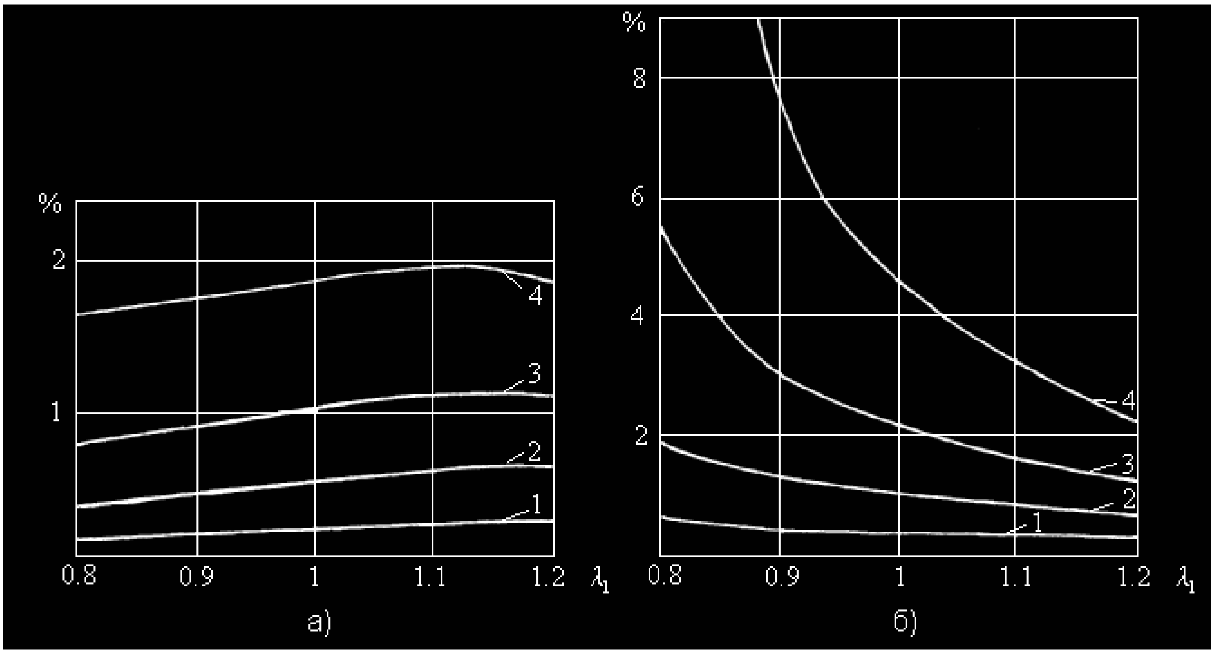

Рисунок 2

Как видно из рис. 1 учет инерции вращения в пределах рассматриваемых скоростей движения поверхностной нагрузки и значений λ_1 в случае жесткого контакта вносит незначительную поправку (меньше 2,6%), то в случае нежесткого контакта (рис. 1б) отличие в результатах будет очень большим (до 30%). Особенно необходим учет инерции вращения при $\lambda_1 < 1$ и больших скоростях движения нагрузки.

На рис. 2 (а - жесткий контакт, б - нежесткий контакт) показано влияние инерции вращения на составляющую напряжения $\tilde{Q}_{22}$ в точке $y_1 = -\lambda_1 h$; $y_2 = -2h\lambda_1$ для несжимаемого материала. Обозначения на рис. 2 те же, что и на рис. 1. Конкретный вид таких зависимостей определяется положением точки слоистой среды относительно точки приложения нагрузки.

Таким образом, учет инерции вращения при выводе уравнений движения для пластины особенно важен при нежестком контакте, предварительном сжатии и больших скоростях движения нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. - Киев: Наукова думка, 1973. - 272 с.
2. Achenbach J.D., Keshawa S.P., Herrmann G. Moving load on a plate resting on an elastic half space // Trans.ASME.Ser.E.J.Appl.Mech.– 1967.- 34, № 4.–P.183– 189.
3. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Динамика слоистого сжимаемого предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. - 1986. - 22, №9.-С. 8-15.
4. Глухов Ю.П. К определению критических скоростей движения нагрузки по пластине, лежащей на несжимаемом предварительно деформированном полупространстве// Прикл. механика . - 1986. -22, №10.-С. 57-62.

Получено 15.06.2007 г.