УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Е.Н. Борисов, Ю.П. Глухов

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассматривается плоская задача об установившемся движении упругого двухслойного полупространства с начальными напряжениями под действием движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузки. Пусть слоистое полупространство состоит из пластины и подстилающего ее полупространства из предварительно напряженного сжимаемого или несжимаемого материала. Запишем постановку задачи в комплексных потенциалах, введенных в работах [1, 2, 4, 5]. Для этого введем следующие комплексные переменные

$$z_j = y_1 + \mu_j (y_2 + h); \ \ \overline{z_j} = y_1 + \overline{\mu_j}(y_2 + h); \ j = 1,2 \qquad (1)$$

Учитывая (1), уравнения движения для полупространства в подвижной системе координат через функции $\chi^{(j)}$ можно записать в виде [3]. .Запишем условия контакта между пластиной и полупространством. Здесь ограничимся случаем равных корней определяющего уравнения [4] и рассмотрим жесткий контакт. Используя комплексные потенциалы [1, 2] с учетом (1), граничные условия при $y_2 = -h$ при жестком контакте можно записать в виде [3]

$$\begin{gathered}
\mathrm{Re}\left\{\gamma_{21}^{(1)} \ \left[\varphi_1''(y_1) + y_1\varphi_2''(y_1)\right] + \gamma_{21}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} = \tau(y_1); \\
\mathrm{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)} \ \left[\varphi_1''(y_1) + y_1\varphi_2''(y_1)\right] + \gamma_{22}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} = q(y_1); \qquad (2) \\
\mathrm{Re}\left\{\gamma_{2}^{(1)} \ \left[\varphi_1'(y_1) + y_1\varphi_2'(y_1)\right] + \gamma_{2}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} = w(y_1); \\
\mathrm{Re}\left\{\gamma_{1}^{(1)} \ \left[\varphi_1'(y_1) + y_1\varphi_2'(y_1)\right] + \gamma_{1}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} = u(y_1) + h\varphi(y_1);
\end{gathered}$$

Из уравнений [3] и (2) исключим функции $u(y_1), w(y_1), q(y_1), \tau(y_1)$. После несложных преобразований получим два уравнения для определения аналитических функций $\varphi_j,\ j = 1, 2$ и выражение для функций угла поворота сечения пластины φ через

© БАБИЧ С.Ю., БОРИСОВ Е.Н., ГЛУХОВ Ю.П., 2007

аналитические функции φ_j [3]. Опуская промежуточные результаты, после ряда преобразований получим

$$
\begin{gathered}
-\theta_1\theta_2\gamma_1^{(1)}[\varphi_1^{IV}(z)+z\varphi_2^{IV}(z)]-\theta_1\theta_2[3\gamma_1^{(1)}+\gamma_1^{(2)}]\varphi_2'''(z)+\\
+[\theta_4\gamma_{21}^{(1)}+\theta_1(\theta_3-2kh)\gamma_2^{(1)}]\;\;[\varphi_1'''(z)+z\varphi_2'''(z)]+\\
+[\theta_4(\gamma_{21}^{(1)}+\gamma_{21}^{(2)}+\theta_1(\theta_3-2kh)(2\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)})]\quad\varphi_2''(z)-\\
-\theta_1\gamma_{22}^{(1)}[\varphi_1''(z)+z\varphi_2''(z)]-\theta_1\gamma_{22}^{(2)}\varphi_2'(z)=\\
=-\frac{1}{\pi\;\;i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[\theta_1P_2(y_1)-\theta_2P_1'(y_1)]dy_1}{y_1-z};\\
-\theta_1\theta_3\gamma_2^{(1)}[\varphi_1^{IV}(z)+z\varphi_2^{IV}(z)]-\theta_1\theta_3[3\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}]\varphi_2'''(z)+\\
+\theta_1(2k\gamma_1^{(1)}+\gamma_{22}^{(1)})\,[\varphi_1'''(z)+z\varphi_2'''(z)]+\\
+\theta_1[2k(2\gamma_1^{(1)}+\gamma_1^{(2)}+\gamma_{22}^{(1)}+\gamma_{22}^{(2)})]\,\varphi_2''(z)-\\
-2k\gamma_{21}^{(1)}[\varphi_1''(z)+z\varphi_2''(z)]-2k\gamma_{21}^{(2)}\varphi_2'(z)=\\
=-\frac{1}{\pi\;\;i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[2kP_1(y_1)-\theta_1P_2'(y_1)]dy_1}{y_1-z}.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Систему уравнений (3) несложно привести к виду

$$
\begin{gathered}
L[\varphi_1''(z)+z\varphi_2''(z)]=f_1(z)\\
L[\varphi_2'(z)]=f_2(z)
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Где дифференциальный оператор L и функции $f_j\ (j=1,2)$ определяются из [3].

Таким образом, для жесткого контакта при равных корнях определяющего (основного) уравнения задача свелась к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида (4) относительно функций $\varphi_1''(z_1)+z_1\varphi_2''(z_1)$ и $\varphi_2'(z_1)$. Получив функции $\varphi_1''(z_1)+z_1\varphi_2''(z_1)$ и $\varphi_2'(z_1)$, легко определить функции $\varphi_j''(z_1)$, $(j=1,\ 2)$, а затем напряжения и скорости перемещений в полупространстве (перемещения в данном случае определяются с точностью произвольной постоянной). Изгибающий момент в пластине можно найти аналогично [3].

Численные исследования в данной работе проведены в рамках теории конечных начальных деформаций: для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа и для несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича.

На основе анализа полученных числовых результатов выявлен следующий механический эффект: значение критических скоростей движения нагрузки и их количество существенно зависит от начальных напряжений в полупространстве, механических характеристик пластины и полупространства и условий их контакта. При жестком соединении пластины с полупространством возможно существование двух критических скоростей движения нагрузки, по крайней мере, одна из которых больше скорости волн Рэлея.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич С.Ю., Гузь А.Н. Комплексные потенциалы плоской динамической задачи для сжимаемых упругих тел с начальными напряженими // Прикл. механика.-1981.-Т.17, №7.-с. 75-83.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю. Плоские динамические задачи для упругих несжимаемых тел с начальными напряженими // Прикл. математика и механика.-1982.-Т.46, №2.-с. 263-271.
3. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Динамика слоистого сжимаемого предварительно напряженого полупространства при взаимодействии подвижной нагрузки // Прикл. механика.-1986.-Т.22, №9.-с.8-15.
4. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.В. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. - К.: Вища школа, 1995.-304с.
5. Guz A. N., Babich S. Yu., Rudnitsky V. B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research// Apll. Mech. Rew.- 1998.-51, №5. –p. 343-371.

Получено 15.06.2007 г.