

КРИТЕРИЙ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С КОДИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ

Введение

Системы получения изображений в гамма-лучах при помощи кодированных апертур представляют собой мультиплексные системы измерений [1,2], предназначенные для пространственного кодирования положения источников гамма-излучения, регистрации кодированной информации и восстановления пространственных распределений источников. Обязательными составными частями такой системы являются кодирующая маска (одно- или двумерная) и позиционно-чувствительная детектирующая плоскость (позиционно-чувствительный детектор, ПЧД), размерность которой соответствует размерности маски, а также системы сбора и обработки спектрометрической информации.

Первоначально системы получения изображений в гамма-лучах с кодированными апертурами (системы с кодированными апертурами – СКА) были разработаны и изготовлены для целей гамма-астрономии и предназначались для получения изображений точечных и точечно-подобных источников гамма-излучения звездного неба. Таким образом, СКА астрономического назначения были оптимизированы для работы в параллельных лучах. Высокая чувствительность СКА, обеспечиваемая мультиплексностью измерений, предопределила необходимость разработки таких систем для получения гамма-изображений ядерно-технических объектов (заводов по переработке ядерных материалов, пунктов захоронения радиоактивных отходов и т.п.) и локализации радиационных аварий и инцидентов. В последние годы были созданы СКА для получения изображений протяженных и распределенных источников в ближнем поле, т.е. в расходящихся лучах, в условиях сложной радиационной обстановки [3,4].

В СКА для восстановления пространственных распределений источников гамма-излучения чаще всего используется метод корреляции или его модификации [5]. Преимущества этого метода восстановления перед другими (максимального правдоподобия,

минимума энтропии) заключаются в простоте математических действий и, как следствие, в высоком быстродействии, что особенно важно при получении многоэлементных изображений поля зрения.

Основные исследования и публикации

Корреляционное изображение

Процесс получения изображения методом корреляции (корреляционное изображение) математически можно представить в виде формулы (для простоты записи мы используем одномерный случай, что не уменьшает общности рассуждений)

$$S_i^* = \sum_{k=0}^{N-1} P_k \cdot G_{i+k} \quad (1)$$

где S_i^* – элемент матрицы восстановленного пространственного распределения источников гамма-излучения, P_k – элемент матрицы счетов событий, зарегистрированных ПЧД, G_{i+k} – элемент матрицы обработки, вид которой однозначно связан с видом матрицы, описывающей расположение прозрачных и поглощающих элементов в кодирующей маске, N – количество элементов разрешения ПЧД, которое равно количеству элементов в базовом фрагменте кодирующей маски. Элемент G_i равен 1, если его положение соответствует положению открытого элемента маски, и -1 , если его положение соответствует положению поглощающего элемента

Полагая, что статистика счетов событий регистрации гамма-квантов подчиняется распределению Пуассона, следуя [5], можно показать, что выборочная оценка дисперсии одного элемента изображения равна

$$\sigma_i^{*2} = \sigma^{*2} = \sum_{k=0}^{N-1} P_k \cdot G_{i+k}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} P_k \quad (2)$$

где N – количество элементов ПЧД (количество элементов в базовом фрагменте маски).

Таким образом, выборочная оценка дисперсии элемента восстановленного изображения равна сумме всех счетов событий, зарегистрированных детектирующей плоскостью в течение цикла измерений.

В обычной практике получения изображений с помощью СКА оценка статистической значимости элемента изображения производится по соотношению

$$S_i^* / \sigma^* \geq k \quad (3)$$

где k – уровень статистической значимости элемента, S_i^* и σ^* определяются из (1) и (2), соответственно.

Обычно, принимают $k = 3$ и в редких случаях повышают до 5. Считается, что при $k \geq 3$ источник излучения обнаруживается с доверительной вероятностью не менее 0.999, т.е. при наблюдении фоновой сцены без источников излучения восстановленное распределение может содержать около (или меньше) 0.1 % элементов, превышающих порог принятия решения о наличии источника.

В практике проведения фоновых наблюдений СКА, разработанными и построенными в НИПКИ "Искра", было обнаружено, что элементы, превышающие "трехсигмовый" порог, встречаются в восстановленной фоновой сцене значительно чаще. Их количество достигает величины 5 – 10 %. Подобные результаты наблюдались на всех без исключения СКА, вне зависимости от типа применяемых кодирующих масок – одно- или двумерных, квадратично-вычетных или на основе кодов Хэмминга. По-видимому, столь значительная разница ожидаемых и наблюдаемых величин связана с особенностями восстановления пространственного распределения и требует применения иных критериев принятия решения.

Постановка задачи

Статистика изображения фона

Предположим, что СКА наблюдает сцену однородного и стационарного фона при отсутствии источников гамма-излучения.

Предположим, что СКА наблюдает сцену однородного и стационарного фона при отсутствии источников гамма-излучения. Наблюдения производятся методом "маска-антимаска" [3] с длительностями полупериодов равными T . В результате в течение полупериода "маска" в i -м элементе (или детекторе) ПЧД будут зарегистрированы n_i^m счетов событий, в течение полупериода "антимаска" – n_i^a счетов. Известно, что распределение счетов подчиняется распределению Пуассона, причем в условиях однородного фона математические ожидания (соответственно, и

дисперсии) распределений для всех элементов ПЧД одинаковы. Обозначим μ матожидание фонового счета в элементе ПЧД.

В практике применения СКА обычно количество счетов в элементе разрешения ПЧД значительно больше 30. Поэтому с большой точностью можно считать, что распределение счетов в элементе подчиняется нормальному закону распределения с матожиданием и дисперсией равными μ (с.к.о. $\sigma = \sqrt{\mu}$).

Элемент разностной матрицы счетов P , подвергаемой в дальнейшем обработке, вычисляется как разность соответствующих элементов матриц счета за цикл "маска" и цикл "антимаска".

$$P_i = n_i^m - n_i^a \quad (4)$$

В результате распределение счетов в каждом элементе матрицы P подчиняется нормальному распределению с матожиданием $\mu_P = 0$ и дисперсией $D_P = 2 \cdot \mu$.

Как следует из (1), каждый элемент матрицы восстановленного распределения источников излучения есть алгебраическая сумма элементов матрицы счетов. Распределение вероятности значений такой суммы также подчиняется нормальному закону с матожиданием $M_i = M = \sum_{k=0}^{N-1} \mu_p \cdot G_{i+k} = 0$ и дисперсией $D_i = D = 2 \cdot N \cdot \mu$. Очевидно, что дисперсия равна математическому ожиданию суммы всех счетов событий за цикл измерений.

В физическом смысле элементы матрицы S^* восстановленного пространственного распределения представляют собой сумму счетов событий, зарегистрированных в результате взаимодействия с ПЧД гамма-квантов, пришедших из соответствующего элемента пространства за время наблюдения. Однако в результате вычисления по (1) элементы имеют как положительные, так и отрицательные значения. Физический смысл отрицательных элементов не определен, поэтому при оценке наличия источника излучения рассматриваются только положительные элементы матрицы S^* . Поэтому очевидно, что для оценки вероятности появления в изображении фона элементов, превышающих порог принятия решения возможно использование распределения экстремальных значений [6].

Статистика максимальных значений

Распределение экстремальных значений описывает предельное распределение для минимального или максимального элемента

выборки независимых наблюдений из распределений экспоненциального типа (нормального, гамма, экспоненциального и т.д.). Для случая выборки из нормальных распределений стандартизованных случайных величин ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) функция плотности вероятности максимальных значений имеет вид (Э.Гумбел)

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_m} \cdot \exp \left[\frac{\mu_m - x}{\sigma_m} - \exp \left(\frac{\mu_m - x}{\sigma_m} \right) \right] \quad (5)$$

а функция распределения

$$F(x) = \exp \left[- \exp \left(\frac{\mu_m - x}{\sigma_m} \right) \right] \quad (6)$$

где $\mu_m = \mu_m(N) = \sqrt{2 \cdot \ln N}$ - мода распределения, $\sigma_m = \mu_m^{-1}$ - параметр формы, N - объем выборки.

Для распределения (6) матожидание $Mx = \mu_m + 0.5776 \cdot \sigma_m$, а дисперсия $Dx = 1.645 \cdot \sigma_m^2$. Типичный вид зависимостей (5) и (6) показан на рисунке 1 для случая $\mu_m = 20$. Значения σ_m указаны у кривых.

После замены переменных на нестандартизованные в интересующем нас случае $M = 0$ и $D = 2 \cdot N \cdot \mu$ из (5) получим распределение плотности вероятности максимального значения в виде

$$f_m(x) = \frac{\mu_m}{\sigma} \cdot \exp \left[\mu_m \cdot \left(\mu_m - \frac{x}{\sigma} \right) - \exp \left[\mu_m \cdot \left(\mu_m - \frac{x}{\sigma} \right) \right] \right] \quad (7)$$

где $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{2 \cdot N \cdot \mu}$

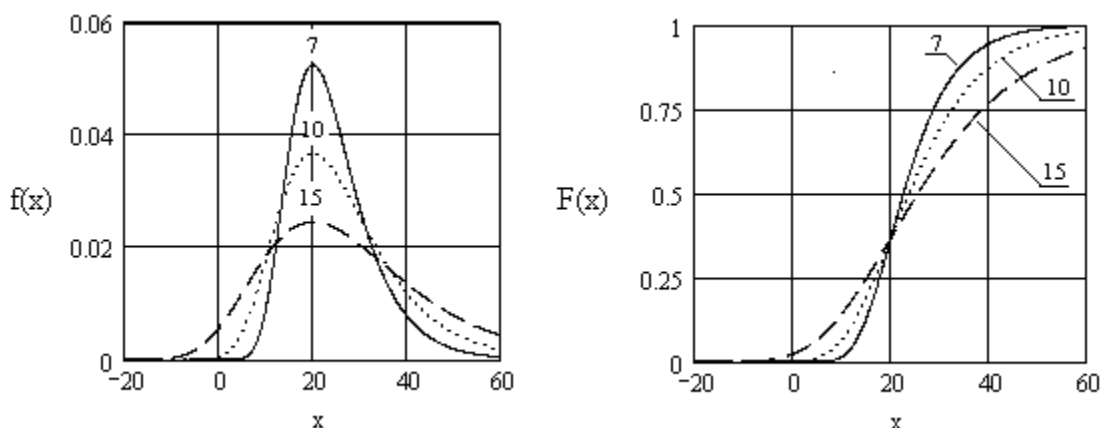


Рисунок 1 - Функции плотности вероятности (а) и функции распределения (б) максимальных значений для $\mu_m = 20$ и различных значений σ_m

Распределение (7) может быть использовано для оценки вероятности появления максимального значения определенной величины в корреляционном изображении, полученном с помощью кодированной апертуры. В качестве оценки дисперсии (и, соответственно, оценки с.к.о), очевидно, необходимо использовать сумму всех счетов событий за время измерений в соответствии с (2).

Результаты численных оценок и их обсуждение

В современных СКА минимальное количество элементов в базовом фрагменте кодирующей маски составляет несколько десятков [3-5], а максимальное достигает нескольких сотен [8]. Поэтому для численных оценок были использованы значения N – объем выборки и количество элементов в базовом фрагменте кодирующей маски – в диапазоне от 50 до 300. На рисунке 2 показаны функции распределения, вычисленные при различных значениях параметров распределения в соответствии с

$$F_m(x, N, \sigma) = \int_{-\infty}^x \frac{\mu_m(N)}{\sigma} \cdot \exp \left[\mu_m(N) \cdot \left(\mu_m(N) - \frac{\xi}{\sigma} \right) - \exp \left[\mu_m(N) \cdot \left(\mu_m(N) - \frac{\xi}{\sigma} \right) \right] \right] d\xi \quad (8)$$

На рисунке 2 очевидно увеличение крутизны функции распределения с увеличением объема выборки и с уменьшением дисперсии (количества зарегистрированных событий). Увеличение крутизны означает уменьшение ширины распределения.

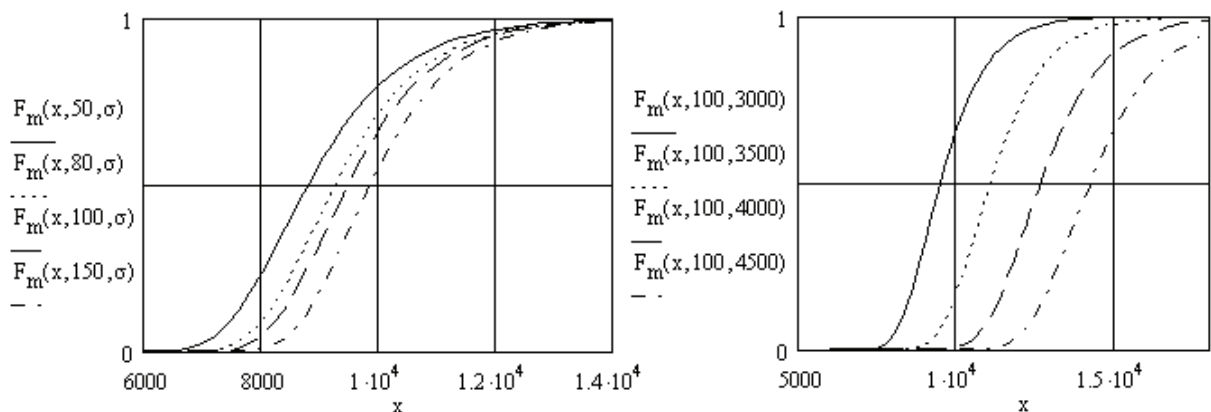


Рисунок 2 - Функция распределения максимальных значений выборки при различных значениях параметров распределения: а) при постоянном значении $\sigma = 3000$; б) при постоянном значении объема выборки $N = 100$

Уровень статистической значимости k в (2) определяет квантиль распределения x_P порядка P в количестве средних квадратических отклонений, где P – вероятность попадания случайной величины x в

интервал $(-\infty, k \cdot \sigma)$, т.е. $-\infty < x \leq k \cdot \sigma = x_p$. Квантиль порядка P для распределения максимальных значений находится из уравнения

$$F_m(x_p, N, \sigma) = P \quad (9)$$

Чтобы определить зависимость уровня статистической значимости элемента изображения от вероятности необходимо решить уравнение

$$\int_{-\infty}^{k \cdot \sigma \mu_m(N)} \frac{\mu_m(N)}{\sigma} \cdot \exp\left[\mu_m(N) \cdot \left(\mu_m(N) - \frac{\xi}{\sigma}\right)\right] - \exp\left[\mu_m(N) \cdot \left(\mu_m(N) - \frac{\xi}{\sigma}\right)\right] d\xi - P = 0 \quad (10)$$

относительно k для различных значений P .

Полученная в результате решения функция, как видно из (10), будет также зависеть от объема выборки N . На рисунке 3 показаны зависимости уровня статистической значимости от вероятности P появления максимального значения величиной $S^* \leq k(P, N) \cdot \sigma$ при различных значениях объема выборки.

Из рисунка 3 очевидно, что даже при малых объемах выборки значение $k = 3$ не может обеспечить уровень доверительной вероятности отсечки фона даже 0.95.

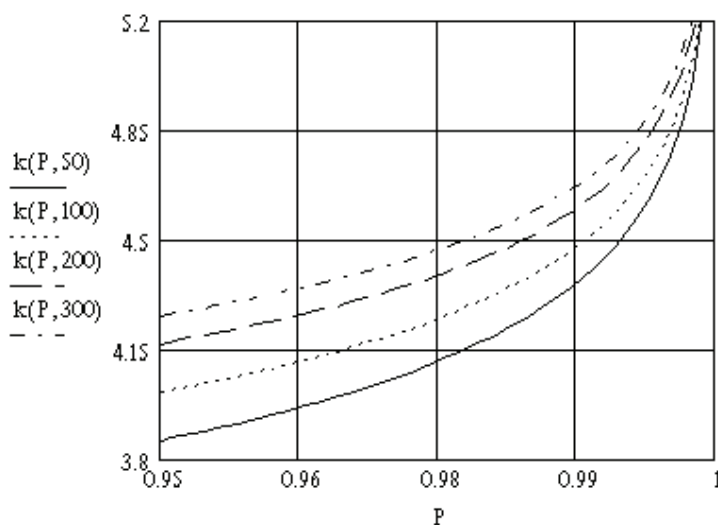


Рисунок 3 - Зависимость уровня статистической значимости от вероятности появления максимального значения при различных объемах выборки

Для случая кодирующей маски по основанию 19 (телескоп с кодированной апертурой) уровень $3 \cdot \sigma$ обеспечивает доверительную вероятность только ≈ 0.85 , а в случае $N = 59$ (томограф) – не более 0.7. Анализ зависимостей $k(P, N)$ приводит к выводу, что для обеспечения доверительной вероятности отсечки фоновых выбросов

не менее 0.999 порог принятия решения о наличии источника излучения в поле зрения СКА должен составлять не менее 5.4σ .

Выводы

На основе анализа статистических характеристик изображений, получаемых СКА, однородного радиационного фона при отсутствии источников излучения и анализа статистики экстремальных (максимальных) значений показано, что общепринятый “трехсигмовый” критерий не обеспечивает ожидаемого уровня доверительной вероятности отсечки фоновых выбросов. Для обеспечения надежности принятия решения о наличии источника излучения в поле зрения могут быть применены статистические методы проверки гипотез и критерии согласия, однако теория экстремальных значений дает возможность использовать более простой метод. Анализ статистики максимальных значений позволяет установить более высокие пороги принятия решений и оценить доверительную вероятность отсечки фона.

Расчитанные на основе распределения экстремальных значений зависимости уровня статистической значимости позволяют выбрать необходимый порог принятия решения, обеспечивающий желаемый уровень доверительной вероятности. Так, например, уровень 0.999 достигается при k_i 5.4 для СКА с кодирующими масками размерностью в несколько сотен элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сороко Л.М. Мультиплексные системы измерений в физике. М.: Атомиздат, 1980.–120 с.
2. Федоров Г.А. Радиационная интроскопия: Кодирование информации и оптимизация эксперимента. М.: Энергоатомиздат, 1982. - 112 с.
3. P.T. Durrant, M. Dallimore, I.D. Jupp, D. Ramsden. The application of pinhole and coded aperture imaging in the nuclear environment. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, 1999, A 422, pp. 667-671
4. О.П. Иванов, В.Е. Степанов, А.Н. Сударкин, Л.И. Уруцкоев. Портативный прибор для получения изображений источников гамма-излучения с апертурой на основе кодирующих масок. Приборы и техника эксперимента, 1998, № 4, с. 127-133.
5. Dunphy P.P., McConnell M.L., Owens A., Chupp E.L., Forrest D.J., Googins J. A Balloon-Borne Coded Aperture Telescope for Low-Energy Gamma Ray Astronomy. Nuclear Instrument and Methods in Physics Research, 1989, A 274, pp. 362 – 379.

6. Статистические методы в экспериментальной ядерной физике. З.Идье, Д.Драйард, Ф.Джеймс, М.Рус, Б.Садуле.: Атомиздат, 1976. – 335 с.
7. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. – 587 с.
8. J. Evans, I.D .Jupp, T. Carter, D. Ramsden. Development of Large Area CsI(Tl)-photodiode Array for Explosives Detection by Neutron-activation Gamma-ray Spectroscopy. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, 1999, A 422, pp. 900 – 905.

Получено 12.06.2007 г.