УДК 004.932

П.І. Когут, М.Є. Сердюк

ПРО ЗАДАЧУ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ ЗА ЇХ КАРКАСНОЮ ІНТЕРПОЛЯЦІЄЮ

Вступ

Сучасний стрімкий розвиток цифрової відеотехніки та технологій швидкісної передачі графічної інформації ставить проблему покращення зорової якості цифрових зображень внаслідок їх просторові інтерполяції як одну з найактуальніших в цій області. В основі її розв’язання лежить розробка нових підходів до побудови алгоритмів зміни просторової щільності пікселів. Одним із них є підхід, який грунтується на двоетапній схемі просторової інтерполяції. На першому етапі розв’язується задача каркасної інтерполяції, яка полягає у відтворенні інтерпольованого зображення в околі тієї частини топографічної карти, яка містить вихідний масив пікселів. Ця множина називається каркасом і має густо перфорований характер. На другому етапі проблема полягає у відтворенні результуючого зображення поза межами каркасу. Власне питанням постановки і розв’язності цієї задачі, яка називається задачею реконструкції цифрових зображень, і присвячена дана робота.

Позначимо через Δ^{WH} рівномірну дискретну сітку на множині $\overline{\Delta}=[0,W]\times[0,H]$: $\Delta^{WH}=\{(i,j): i=1,2,...,N=[H],\ j=1,2,...,M=[W]\}$. Надалі точки множини Δ^{WH} будемо називати пікселами. Нехай $\{P_{ij}(I)\}_{i=\overline{1,N}}^{j=\overline{1,M}}=P(I)$ є довільним цифровим малюнком деякого регулярного зображення $I\in D'(\Delta)$ в шкалі сірих відтінків, для якого $\operatorname{supp} I=\Delta$,

$$<I,\varphi>=\int_\Delta \widetilde{I}(x,y)\varphi(x,y)\,dxdy \text{ для всіх } \varphi\in D(\Delta),$$

а породжуюча функція $\widetilde{I}$ задовольняє умову $\widetilde{I}\in BV(\Delta)$. Тут через $BV(Q)$ позначено лінійний простір всіх функцій з $L^2(Q)$, варіація яких на Q є обмеженою. Як відомо [3], $BV(Q)$ є банаховим простором відносно норми, $\|f\|_{BV(Q)}=\|f\|_{L^2(Q)}+\int_Q|Du|$, де позначено

$$\int_Q |Du| = \sup\{\int_Q u \operatorname{div}\varphi\, dx\colon \varphi \in C_0^1(Q,R^2), |\varphi(x)| \le 1$$

$$\int_Q | Du | = \sup\left\{\int_Q u div\varphi\, dx : \varphi \in C^1(Q;R^2), |\varphi(x)| \le 1 \text{для } x \in Q\right\}. \quad (1)$$

Нехай Ω - довільний допустимий каркас для $I \in BV(\Delta)$, а зображення $I^* \in D'(\Delta)$ є відповідною каркасною інтерполяцією для I. Тобто його образ $P(I^*)$ на піксельну сітку Δ^{WH} співпадає з $P(I)$, $\operatorname{supp} I^* = \Omega$, та існують функція $\widetilde{I}^* : \Omega \to R$ і диз'юнктивне розбиття множини $\Omega = \bigcup_{i=1}^L \Omega_i \quad (\Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing, i \ne j)$ такі, що $\widetilde{I}^* \in C(\overline{\Omega}_i) \bigcap H^2(\Omega_i)$ $\forall i = 1,\ldots,L$ і

$$< I^*, \varphi >= \int_\Omega \widetilde{I}^*(x,y)\varphi(x,y)\, dxdy \text{ для всіх } \varphi \in D(\Omega).$$

Тоді проблемою реконструкції зображення $I \in BV(\Delta)$ будемо називати задачу інтерполяції функції $\widetilde{I}^* : \Omega \to R$ на множину $\Delta \setminus \Omega$, або інакше задачу побудови функції $u = Z[\widetilde{I}^*] \in BV(\Omega)$ (тут $Z : BV(\Omega) \to BV(\Delta)$ - оператор продовження), при якій результуюче зображення

$$< \widetilde{I}, \varphi >= \int_\Omega Z[\widetilde{I}^*](x,y)\varphi(x,y)\, dxdy \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

задовольняло б принципу “неперервного продовження” Gestaltist'a (the Good Continuation Principle of Gestaltist) [4]. Отже, реконструкція зображень передбачає відтворення значень функції $\widetilde{I}^*$ в області $\Delta \setminus \Omega$ за її значеннями на каркасі Ω. Оскільки проблема побудови будь-якого оператора продовження зазвичай є такою, що не має єдиного розв'язку, то дана робота ставить за мету започаткувати варіаційний підхід до розв'язання таких задач, навести формальну їх постановку та результати, щодо розв'язності проблеми реконструкції статичних зображень.

Попередні теоретичні положення

Введемо наступні позначення: $\widetilde{\Omega} = \operatorname{int}(\Delta \setminus \Omega)$, $B = \operatorname{int}\Omega$. Ясно, що B та $\widetilde{\Omega}$ є відкритими множинами в R^2 з кусково-гладкими границями і при цьому $\overline{B} = \Omega$. Розглянемо наступні функціональні простіри

$$X(Q) = \{\theta \in L^\infty(Q,R^2) : \operatorname{div}(\theta) \in L^\infty(Q)\} \quad (2)$$

$$L_{BV}(Q) = \{u \in L^2(Q) : T_k(u) \in BV(Q), \forall k > 0\} \quad (3)$$

де $k \geq 0$ довільне число, а оператор T_k означено як $T_k(u) = [k-(k-u)^+]\mathrm{sign}_0(u)$. Ясно, що множина $L_{BV}(Q)$ утворює лінійний підпростір простору $L^2(Q)$.

В роботі [2] показано, що для будь-якої функції $z \in X(Q)$ її нормальна складова $z \cdot \nu^Q$ має слабкий слід на границі ∂Q, тобто існує лінійний оператор $\gamma : X(Q) \to L^\infty(\partial Q)$ такий, що $\|\gamma(z)\|_{L^\infty(Q)} \leq \|z\|_{L^\infty(Q,R^2)}$ і $\gamma(z)(x) = z(x) \cdot \nu^Q(x) \quad \forall x \in \partial Q$ якщо $z \in C^1(\overline{Q}, R^2)$, де через $\nu^Q(x)$ позначено зовнішню одиничну нормаль до границі ∂Q в точці x. Більше того, для довільної пари функцій $w \in BV(Q)$ та $z \in X(Q)$ має місце наступна формула Гріна [1].

$$\int_Q w \,\mathrm{div}(z)\, dx + \int_Q (z \cdot Dw) = \int_{\partial Q} z \cdot \nu^Q w \, d\mathcal{H} \qquad \textbf{(4)}$$

Тут через $(z \cdot Dw)$ позначено лінійний неперервний функціонал над простором $C_0^1(Q)$, дія якого визначається за правилом

$$< (z \cdot Dw), \varphi > = -\int_Q \mathrm{div}(z\varphi) w \, dx \qquad \textbf{(5)}$$

Нехай $g \in L^\infty(\partial Q)$ - довільна фіксована функція така, що $\|g\|_{L^\infty} < 1$.

Означення 1. *Будемо казати, що пара* (u,v) *належить графіку оператора* $\mathcal{B}$ *(скорочено* $(u,v) \in \mathrm{Graph}(\mathcal{B})$ *), якщо* $u \in L_{BV}(Q)$, $v \in L^\infty(Q)$ *і при цьому існує розподілення* $z \in \mathbf{X}(Q)$ *таке, що*

$$\mathrm{div}\, z = -v \quad \textit{в} \ D'(Q) \qquad \textbf{(6)}$$

$$z \cdot DT_k(u) = | DT_k(u) | \quad \forall k > 0, \qquad \textbf{(7)}$$

$$z \cdot \nu^Q = g \ \textit{ майже скрізь на } \partial Q \qquad \textbf{(8)}$$

Неважко показати, що означена таким чином множина $\mathrm{Graph}(\mathcal{B})$ завжди непуста, а оператор $\mathcal{B}$ монотонний. Встановимо наступний результат.

Твердження 1. Оператор $\mathcal{B}$ є секвенційно замкненим в добутку сильної топології на $L^r(Q)$ $(r \in [1,2))$ та топології *-слабкої збіжності на $L^\infty(Q)$, тобто, якщо $(u_n, v_n) \in \mathrm{Graph}(\mathcal{B})$, $u_n \to u$ в $L^r(Q)$, а $v_n \overset{*}{\rightharpoonup} v$ в $L^\infty(Q)$, то $(u,v) \in \mathrm{Graph}(\mathcal{B})$.

Доведення. Нехай пари $(u_n, v_n) \in \mathrm{Graph}(\mathcal{B})$ є такими, що $u_n \to u$ в $L^r(Q)$, а $v_n \overset{*}{\rightharpoonup} v$ в $L^\infty(Q)$. Покладемо $f_n = u_n - v_n$. Тоді $f_n \rightharpoonup f = u - v$ в

$L^r(Q)$. Означимо при кожному n функції θ_n за правилом: $\theta_n \in L^\infty(Q,R^2)$, $|\theta_n| \le 1$, $\theta_n \cdot DT_k(u_n) = |DT_k(u_n)|$ і $\theta_n \cdot \nu^Q = g$. Ясно, що функції θ_n утворюють рівномірно обмежену послідовність в $L^\infty(Q,R^2)$. Отже, згідно з теоремою Банаха-Алаоглу, можна вважати, що ця послідовність є *-слабко збіжною в $L^\infty(Q,R^2)$, тобто знайдеться елемент $\theta \in L^\infty(Q,R^2)$ такий, що

$$\int_Q \theta_n \psi \, dx \to \int_Q \theta \psi \, dx \quad \forall \psi \in L^1(Q).$$

За означенням оператора div маємо

$$\int_Q \theta_n \cdot \nabla \varphi \, dx = -\int_Q \operatorname{div} \theta_n \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q).$$

Отже, переходячи в співвідношенні $\operatorname{div}\theta_n = -v_n$ до границі, коли $n \to \infty$, отримаємо $\operatorname{div}\theta = -v$. Тим самим показано, що співвідношення (6) для граничних елементів виконується.

Доведемо тепер властивість замкнености в (8). Нехай φ - довільна неперервна функція на Q включно до її границі ∂Q. Перепишемо співвідношення (6) у вигляді $u_n + \operatorname{div}\theta_n = f_n$, помножимо його на $\varphi \in C(\overline{Q}) \cap C^1(Q)$ і скористаємося формулою Гріна. Отримаємо

$$\int_Q u_n \varphi \, dx - \int_Q \theta_n \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial Q} \theta_n \cdot \nu^Q \varphi \, d\mathcal{H} = \int_Q f_n \varphi \, dx. \tag{9}$$

Враховуючи, що $\theta_n \cdot \nu^Q = g$, перейдемо в (9) до границі при $n \to \infty$. Маємо

$$\int_Q u\varphi \, dx - \int_Q \theta \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial Q} g\varphi \, d\mathcal{H} = \int_Q f\varphi \, dx,$$

або скориставшись формулою інтегрування за частинами

$$\int_Q u\varphi \, dx + \int_Q \operatorname{div}\theta \varphi \, dx - \int_{\partial Q} (\theta \cdot \nu^Q - g)\varphi \, d\mathcal{H} = \int_Q f\varphi \, dx.$$

Оскільки $u + \operatorname{div}\theta = f$, то з попереднього знаходимо $\int_{\partial Q} (\theta \cdot \nu^Q - g)\varphi \, d\mathcal{H} = 0$ при всіх $\varphi \in C(\overline{Q}) \cap C^1(Q)$.

Отже, $\theta \cdot \nu^Q = g$ на ∂Q.

Таким чином залишається довести, що $(\theta \cdot DT_k(u)) = |DT_k(u)|$. Для цього залучимо наступну властивість напівнеперервності знизу (див. [3]): нехай $\{f_j\}_{j\in N} \subset BV(Q)$ - довільна послідовність, яка збігається в $L^1_{loc}(Q)$ до деякої функції f. Тоді має місце нерівність

$$\int_Q |Df| \le \liminf_{j\to\infty} \int_Q |Df_j|. \tag{10}$$

Отже,

$$\int_Q |DT_k(u)| - \int_{\partial Q} gT_k(u)d\mathcal{H} \le \liminf_n \left[\int_Q |DT_k(u_n)| - \int_{\partial Q} gT_k(u_n)\,d\mathcal{H}\right] =$$
$$= \liminf_n \left[\int_Q (\theta_n \cdot DT_k(u_n)) - \int_{\partial Q} gT_k(u_n)d\mathcal{H}\right] =$$
$$= \liminf_n \left[-\int_Q \operatorname{div}\theta_n T_k(u_n)\,dx + \int_{\partial Q} \theta_n \cdot \nu^Q T_k(u_n)d\mathcal{H} - \int_{\partial Q} gT_k(u_n)d\mathcal{H}\right] =$$
$$= -\liminf_n \int_Q \operatorname{div}\theta_n T_k(u_n)\,dx = -\int_Q \operatorname{div}\theta T_k(u)\,dx =$$
$$= \int_Q (\theta \cdot DT_k(u)) - \int_{\partial Q} gT_k(u)\,d\mathcal{H} \le \int_Q |DT_k(u)| - \int_Q gT_k(u)\,d\mathcal{H}.$$

Звідки випливає, що $\theta \cdot DT_k(u) = | DT_k(u) |$ для всіх $k > 0$. Тим самим включення $(u,v) \in \mathrm{Graph}(\mathcal{B})$ доведено.

Постановка задачі реконструкції зображень

Нехай $I \in BV(\Delta)$ - довільне допустиме зображення, а $I^* \in D'(\Delta)$ є його каркасною інтерполяцією, для якої виконуються умови

$< I^*, \theta >= \int_B \widetilde{I}^*(x)\theta(x)\,dx$ для всіх $\theta \in D(B)$, $\widetilde{I}^* \in BV(B)$.

Тут, як і раніше, ми позначаємо $\widetilde{\Omega} = \mathrm{int}(\Delta \setminus \Omega)$, $B = \mathrm{int}\Omega$.

Нехай θ^* є векторним полем градієнтів функції $\widetilde{I}^*$ на B, яке задовольняє наступні умови:

$$\theta^* \in L^\infty(B, R^2),\ \left|\theta^*\right| \le 1,\ \operatorname{div}\theta^* \in L^\infty(B), \tag{11}$$

$$(\theta^*, D\widetilde{I}^*) = \left|D\widetilde{I}^*\right| \quad \text{як міри на } B. \tag{12}$$

Ми будемо завжди припускати, що θ^* має слід на границі множини Ω. Проте, за побудовою границя каркаса ∂B завжди підлягає декомпозиції на дві складові $\partial B = \partial B_{ext} \bigcup \partial B_{\mathrm{int}}$, де $\partial B_{ext} = \partial B \bigcap \partial\Delta = \partial\Delta$. В зв’язку з цим вважатимемо, що є заданими дві функції $g \in L^\infty(\partial B_{ext})$ та $g_0 \in L^\infty(\partial B_{\mathrm{int}})$ такі, що

$\|g\|_{L^\infty(\partial B_{ext})} < 1;\qquad \|g_0\|_{L^\infty(\partial B_{\mathrm{int}})} < 1;$

$\theta^* \cdot \nu^\Delta = g$ майже скрізь на ∂B_{ext}, $\theta^* \cdot \nu^B = g_0$ майже скрізь на $\partial B_{\mathrm{int}}$.

Задача реконструкції зображення полягає в визначенні функції $u : \Delta \to R$ та векторного поля $u : \Delta \to R^2$ таких, що θ є продовженням поля θ^* на множину $\widetilde{\Omega}$, при якому:

функція $\theta \cdot \nu^B : \partial B_{\mathrm{int}} \to R$ є близькою за метрикою $L^\infty(\partial B_{\mathrm{int}})$ до функції g_0;

$|\theta(x)|\le 1$ та $\theta\cdot Du = |Du|$ майже скрізь на Δ;

кривизна ліній рівнів $u(x)=\lambda,\ \lambda\in R$ в області Δ є мінімальною в наступному сенсі: $\|\operatorname{div}\theta\|_{L^\infty(\Delta)}\to\inf$.

Таким чином, поле θ повинно, з однієї сторони, успадковувати геометрію поля градієнтів функції u, а з іншої, на границі ∂B_{int} бути близьким до поля θ^*. Зауважимо також, що виконання умови $|\theta(x)|=1\ \forall\ x\in\Delta$ в загальному випадку неможливо. Дійсно, якщо $u(x)=\text{const}$, що є типічним для ділянок зображення з постійною інтенсивністю, то $\theta(x)=0$. Отже, його нормалізація за правилом $\theta = Du/|Du|$, що є типовим для гладких функцій, неможлива.

Для формальної постановки задачі введемо наступний функціональний простір

$$W_\xi(\Delta)=\{(u,\theta): u\in BV(\Delta),\quad \theta\in X(\Delta),\quad \|\operatorname{div}\theta\|_{L^\infty(\Delta)}\le\xi,$$
$$|\theta(x)|\le 1,\quad \theta\cdot Du=|Du|,\quad \theta\cdot\nu^\Delta = g \text{ на } \partial\Delta\} \tag{13}$$

На елементах простору $W_\xi(\Delta)$ означимо функціонал:

$$J(u,\theta)=\int_\Delta|\operatorname{div}\theta|^2\,(\gamma+\beta|\nabla k * u|)dx+\alpha\int_\Delta|Du|-\alpha\int_{\partial\Delta}gu\,d\mathcal{H}+$$
$$\tau\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\partial B_{\text{int}}}|\theta\cdot\nu^B-g_0|+\lambda\int_B|u-\widetilde{I}^*|^2\,dx. \tag{14}$$

Тут $\gamma,\alpha,\tau,\lambda,\beta$ - додатні вагові коефіцієнти, $k\in C^1(\Delta)$ - регуляризуюче ядро таке, що $k(x)>0$ всюди на $\widetilde{\Omega}$. Через $\nabla k * u$ позначено оператор згортки

$\nabla k * u=\int_\Delta\nabla k(x-y)u(y)\,dy$.

Означення 2. Будемо казати, що зображення $I^0\in D'(\Delta)$ є результатом реконструкції за каркасною інтерполяцією його дискретних значень на дискретній сітці Δ^{WH}, якщо $<I^0,\varphi>=\int_\Delta\widetilde{I}^0(x)\varphi(x)\,dx$ для всіх $\varphi\in D(\Delta)$, $\widetilde{I}^0\in BV(\Delta)$, де

$$\widetilde{I}^0(x)=\begin{cases}u^0(x), & x\in\widetilde{\Omega}\\ \widetilde{I}^*(x), & x\in\Omega\end{cases} \tag{15}$$

а пара (u^0,θ^0) є розв’язком наступної варіаційної задачі

$$J(u^0,\theta^0)=\inf_{(u,\theta)\in W_\xi(\Delta)}J(u,\theta). \tag{16}$$

 ISSN 1562-9945

Наведемо деякі пояснення щодо вибору структури цільового функціоналу **(16).** Наявність в ньому виразу $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \partial B_{\text{int}}} |\,\theta \cdot \nu^B - g_0\,|$ продиктована принципом “неперервного продовження” Gestaltist’а **[4]**, згідно з яким ті лінії рівня, які перетинають границю ∂B_{int} каркасу Ω повинні зберігати свій напрям близьким до $g_0 = \nabla \widetilde{I}^* \cdot \nu^B$ на ∂B_{int}. Терм $\lambda \int_B |\,u - \widetilde{I}^*\,|^2 dx$ є релаксаційною формою умови близькості функцій u та $\widetilde{I}^*$ на множині B. Що торкається виразу $M = \int_\Delta |\operatorname{div}\theta|^2\,(\gamma + \beta\,|\nabla k * u\,|)dx + \alpha \int_\Delta |\,Du\,|$, то значення оператора дивергенції $\operatorname{div}: X(\Delta) \to L^\infty(\Delta)$ на розподіленнях $\theta \in X(\Delta)$ зазвичай асоціюють з кривизною ліній рівня $u(x) = \text{const}$ реконструйованого зображення. Отже, мінімізація виразу M передбачає такий спосіб реконструкції зображення, при якому кривизна ліній рівнів була би мінімальною.

Про розв’язність задачі реконструкції зображень

Перш ніж перейти до доведення розв’язності задачі умовної мінімізації **(16)**, наведемо деякі попередні результати. Позначимо через $\mathrm{B}_r(x)$ кулю в R^2 радіусом r з центром в точці x. Нехай A − довільна підмножина $\mathrm{B}_r(x)$. Позначимо через $|\,A\,|$ міру Лебега множини A. Нехай x − довільна точка границі $\partial\Delta$. Ведемо до розгляду функцію $q : \partial\Delta \to R$ за наступним правилом

$$q(x) = \limsup_{r \to 0+} \{\operatorname{Per}^{-1}(A, \Delta) \int_{\partial\Delta} \chi_A \, d\mathcal{H} : A \subset \mathrm{B}_r(x), \left|A\right| > 0\}. \qquad \textbf{(17)}$$

Тут $\operatorname{Per}(A, \Delta)$ є периметром множини A відносно Δ, тобто

$$\operatorname{Per}(A, \Delta) = \int_\Delta |\,D\chi_A(x)\,| = \sup\{\int_A \operatorname{div}\varphi \, dx : \varphi \in C_0^1(\Delta; R^2), |\,\varphi(x)\,| \le 1\}.$$

Оскільки границя множини Δ кусково-гладка за побудовою, то легко бачити, що $q(x) = 1$ при всіх $x \in \partial\Delta$. Нехай $g \in L^\infty(\partial\Delta)$ - довільна функція, яка задовольняє умову $\left\|g\right\|_{L^\infty(\partial\Delta)} < 1$. Тоді знайдеться $\sigma > 0$ таке, що

$$\left\|gq\right\|_{L^\infty(\partial\Delta)} = 1 - 2\sigma < 1.$$

Отже, у відповідності до леми **1.2** з роботи **[3]**, маємо:

$$\left|\int_{\partial\Delta} gw \, d\mathcal{H}\right| \le (1 - \sigma) \int_\Delta \left|Dw\right| + C \int_\Delta \left|w\right| dx \quad \forall w \in BV(\Delta),$$

де константа C може залежати лише від σ, g та Δ.

З іншої сторони, за лемою 2.2 з [3], знайдеться константа $\varepsilon_0 > 0$ така, що для кожного $\delta > 0$ можна вказати величину $c(\delta) > 0$, при якій буде виконуватися нерівність

$$\left| \int_{\partial\Delta} gw\, d\mathcal{H} \right| \le (1-\varepsilon_0) \int_{S_\delta} \left| Dw \right| + c(\delta) \int_{S_\delta} \left| w \right| dx \quad \forall w \in BV(\Delta), \tag{18}$$

де позначено $S_\delta = \{x \in \Delta : d(x, \partial\Delta) < \delta\}$.

Тепер наведемо основний результат даного розділу.

Теорема 1. Нехай $\gamma, \alpha, \tau, \beta$ - задані додатні величини $(\beta \ge 0)$, $k \in C^1(\Delta)$ - довільна функція. Тоді при кожному значенні $\xi > 0$ знайдеться $\lambda > 0$ таке, що множина розв’язків задачі **(16)** є непустою.

Доведення. Перш за все покажемо, що функціонал $J = J(u, \theta)$ обмежений знизу на множині допустимих розв’язків $W_\xi(\Delta)$. Дійсно, виходячи з нерівності **(18)** маємо

$$\begin{aligned} J(u,\theta) &\ge \alpha \int_\Delta | Du | - \alpha(1-\varepsilon_0) \int_{S_\delta} | Du | - \alpha\, c(\delta) \int_{S_\delta} | u | dx + \lambda \left\| u - \widetilde{I}^* \right\|^2_{L^2(B)} \ge \\ &\ge \alpha\varepsilon_0 \int_{S_\delta} | Du | - \alpha\, c(\delta) \int_{S_\delta} | u | dx + \lambda \left\| u - \widetilde{I}^* \right\|^2_{L^2(B)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Оскільки δ - довільна величина, то оберемо її так, щоб виконувалося включення $S_\delta \subset B$. За означенням допустимого каркасу таке включення є завжди можливим. Отже, за виконання умови $\left\| u - \widetilde{I}^* \right\|_{L^2(B)} \ne 0$, існує можливість вибору параметра $\lambda > 0$, при якому права частина співвідношення **(19)** буде завжди невід’ємною. Таким чином, $J(u,\theta) > 0$ при всіх $(u,\theta) \in W_\xi(\Delta)$. В результаті

$$\inf_{(u,\theta)\in W_\xi(\Delta)} J(u,\theta) \ge 0.$$

Якщо ж при деякому $\tilde{u} \in BV(\Delta)$ виконується співвідношення $\left\| \tilde{u} - \widetilde{I}^* \right\|_{L^\infty(B)} = 0$, то в силу включення $S_\delta \subset B$ величина

$$\alpha\varepsilon_0 \int_{S_\delta} \left| D\tilde{u} \right| - \alpha\, c(\delta) \int_{S_\delta} \left| \tilde{u} \right| dx = \tilde{C}$$

є сталою. Отже $J(\tilde{u},\theta) \ge \tilde{C}$ для всіх $(\tilde{u},\theta) \in W_\xi(\Delta)$. Тим самим обмеженість знизу функціоналу J на множині $W_\xi(\Delta)$ доведена.

Нехай $\{(u_n,\theta_n) \in W_\xi(\Delta)\}$ - мінімізуюча послідовність в задачі **(16)**, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} J(u_n,\theta_n) = \inf\limits_{(u,\theta)\in W_\xi(\Delta)} J(u,\theta).$

 ISSN 1562-9945

Тоді числова послідовність $|J(u_n,\theta_n)|$ є обмеженою. Отже, знайдеться константа $C>0$ така, що

$$\|\operatorname{div}\theta_n\|_{L^\infty(\Delta)} \le \xi, \qquad (\int_\Delta |Du_n| - \int_{\partial\Delta} g u_n d\mathcal{H}) \le C,$$

$$\left\|\theta_n \cdot \nu^B - g_0\right\|_{L^\infty(\partial B_{\text{int}})} \le C, \quad \left\|u_n - \widetilde{I}^*\right\|^2_{L^2(B)} \le C.$$

Виходячи знову з нерівності (18) та обираючи параметр $\delta>0$ так, щоб $S_\delta \subset B$, маємо

$$\int_\Delta |Du_n| \le C + \int_{\partial\Delta} g u_n d\mathcal{H} \le C + (1-\varepsilon_0)\int_{S_\delta} |Du_n| + c(\delta)\int_{S_\delta} |u_n| dx$$

для деяких $\varepsilon_0>0$ та $c(\delta)>0$. Оскільки $S_\delta \subset B$, то

$$\varepsilon_0 \int_\Delta |Du_n| \le C + c(\delta)\int_B |u_n| dx \le C + c(\delta)|B|^{1/2}\|u_n\|_{L^2(B)} \le$$

$$\le C + c(\delta)|B|^{1/2}(C^{1/2} + \left\|\widetilde{I}^*\right\|_{L^2(B)}) < C' < +\infty.$$

Тим самим встановлено, що на послідовності $\{(u_n,\theta_n) \in W_\xi(\Delta)\}$ функції u_n задовольняють умову:

$$u_n \in BV(\Delta) \ \ \forall n \in N; \ \ \limsup_n \|Du_n\|(\Delta) < C'; \ \ \left\|u_n - \widetilde{I}^*\right\|^2_{L^2(B)} \le C.$$

Отже, за теоремою про компактне вкладення $BV(\Delta)$- $L^r(\Delta)$ для всіх $r\in[1;2)$ це означає, що з послідовності $\{u_n\}_{n\in N}$ можна вилучити підпослідовність (збережемо для неї попереднє позначення), для якої знайдеться елемент $u^0 \in L^r(\Delta)\bigcap L^2(B)$ такий, що $u_n \to u^0$ сильно в $L^r(\Delta)$, $u_n|_B$. $u^0|_B$ в $L^2(B)$. Окрім цього зауважимо, що для будь-якої сильно збіжної в $L^r(\Delta)$ послідовності $\{u_n\}_{n\in N}$ маємо:

1. функції $k*u_n$ неперервні в $\widetilde{\Omega}$ при кожному $n\in N$;
2. $k*u_n \to k*u^0$ в рівномірній топології простору $C(\Delta)$.

Дійсно,

$$\sup_{x\in\Delta}\left|k*(u_n-u^0)\right| \le \sup_{x\in\Delta}\left[(\int_\Delta |k(x-y)|^{\frac{r}{r-1}}dy)^{\frac{r-1}{r}}\left\|u_n-u^0\right\|_{L^r(\Delta)}\right] \le$$

$$\le C^*\left\|u_n-u^0\right\|_{L^r(\Delta)} \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Тепер проаналізуємо властивості послідовності $\{\theta_n\}_{n\in N}$. Оскільки $(u_n,\theta_n)\in W_\xi(\Delta)$, то за означенням простору $W_\xi(\Delta)$ отримуємо:

$|\theta_n| \le 1$ і при цьому $\|\operatorname{div}\theta_n\|_{L^\infty(\Delta)} \le \xi \ \ \forall n\in N.$

Отже, залучаючи теорему Банаха-Алаоглу та переходячи при необхідності до підпослідовності, маємо: знайдеться елемент $\theta^0 \in L^\infty(\Delta, R^2)$ такий, що $\theta_n .^{*}\ \theta^0$ в $L^\infty(\Delta, R^2)$; $\operatorname{div}\theta_n .^{*}\ \operatorname{div}\theta^0$ в $L^\infty(\Delta)$. Дійсно, останнє твердження є наслідком наступних перетворень

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Delta \operatorname{div}\theta_n \varphi\, dx = -\lim_{n\to\infty} \int_\Delta \theta_n \cdot \nabla\varphi\, dx = -\int_\Delta \theta^0 \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Delta \operatorname{div}\theta^0 \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Delta).$$

Таким чином, підсумовуючи отримані результати, приходимо до наступного висновку: з мінімізуючої послідовності $\{(u_n, \theta_n) \in W_\xi(\Delta)\}$ можна вилучити підпослідовність (збережемо для неї вихідні позначення) таку, що

$$\theta_n .^{*}\ \theta^0 \text{ в } L^\infty(\Delta, R^2);\ u_n \to u^0 \text{ в } L^r(\Delta),\ u_n|_B .\ u^0|_B \text{ в } L^2(B),$$

і при цьому $(u_n, -\operatorname{div}\theta_n) \in \mathcal{B}$ при всіх $n \in N$. Отже, в силу секвенційної замкнености оператора $\mathcal{B}$ відносно наведених топологій, отримуємо

$$(u^0, -\operatorname{div}\theta^0) \in \mathcal{B} \Rightarrow (u^0, \theta^0) \in W_\xi(\Delta).$$

Тепер перейдемо до границі в $J(u_n, \theta_n)$, користуючись властивостями напівнеперервності знизу відповідних додатків та отриманими вище результатами. Знаходимо

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Delta |\operatorname{div}\theta_n| (\gamma + \beta |\nabla k * u_n|) dx =$$

$$= \gamma \liminf_{n\to\infty} \int_\Delta |\operatorname{div}\theta_n| dx + \beta \liminf_{n\to\infty} \int_\Delta |\operatorname{div}\theta_n|\, |\nabla k * u_n| dx \geq$$

$$\geq \gamma \int_\Delta \left|\operatorname{div}\theta^0\right| dx + \beta \int_\Delta \left|\operatorname{div}\theta^0\right| \left|\nabla k * u^0\right| dx$$

(як границя від добутку сильно та слабко збіжних послідовностей);

$$\liminf_{n\to\infty} \left\| \theta_n \cdot \nu^B - g_0 \right\|_{L^\infty(\partial B_{\text{int}})} \geq \left\| \theta^0 \cdot \nu^B - g_0 \right\|_{L^\infty(\partial B_{\text{int}})};$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_B \left| u_n - \tilde{I}^* \right|^2 dx \geq \int_B \left| u^0 - \tilde{I}^* \right|^2 dx.$$

В результаті $\inf\limits_{(u,\theta)\in W_\xi(\Delta)} J(u, \theta) = \liminf\limits_{n\to\infty} J(u_n, \theta_n) \geq J(u^0, \theta^0)$. Отже, пара $(u^0, \theta^0) \in W_\xi(\Delta)$ є розв’язком поставленої задачі, що і потрібно було довести.

Висновки

Таким чином, для задачі реконструкції зображень за їх каркасною інтерполяцією запропонована варіаційна постановка.

Визначена структура цільового функціонала з урахуванням принципів, які мають бути дотриманими при відтворенні зображень. Доведено, що на класі функцій з обмеженою варіацією поставлена задача має розв’язок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems, Oxford University Press, 2000.
2. Anzellotti G. Pairing between measures and bounded functions and compensated compactness, Ann.di Mat. Pura ed Appl., 1993. Vol. 135., p. 293--318.
3. Giusti E. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, Birkhдuser, Boston, Basel, 1984.
4. Kanizsa G. Gramбtica de la visiyn.- Paris: Paodis, 1986.

Получено 23.05.2007 г.