

УДК 539.3

Д.Г. Зеленцов, О.А. Радуль, Л.И. Короткая

АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДОЛГОВЕЧНОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ КОРРОДИРУЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ

Введение. При решении задач напряженно-деформированного состояния (НДС), долговечности и оптимального проектирования многоэлементных конструкций, работающих в условиях коррозионного износа, традиционно применяется подход, основанный на совместном использовании какого-либо численного метода решения задачи НДС и численного метода решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс коррозионного воздействия. Обычно для решения задачи НДС используется метод конечных элементов (МКЭ). К недостаткам известных алгоритмов, основанных на использовании МКЭ, следует отнести невысокую эффективность и невозможность оценки погрешности вычислений.

В качестве модели, описывающей коррозионный износ, принимается модель, в которой скорость коррозии линейно зависит от уровня механических напряжений [1]:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0(1 + k\sigma_i); \quad \delta_i|_{t=0} = 0; \quad i = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Здесь δ_i и σ_i – глубина коррозии и напряжение в i -м элементе соответственно; v_0 – скорость коррозии при отсутствии напряжений; k – коэффициент, учитывающий влияние напряжений на скорость коррозии.

Ранее для модели коррозионного износа (1) были получены зависимости долговечности стержневого элемента произвольного сечения, подверженного коррозионному износу, в аналитическом виде [2]:

$$t = t_0 - 2kQ \left[\operatorname{arctg} \frac{2a\delta + b}{d_1} - \operatorname{arctg} \frac{b}{d_1} \right] \frac{1}{v_0 d_1} \quad (2)$$

$$t = t_0 - 2kQ \ln \left[\frac{(2a\delta + b - d_2)(b + d_2)}{(b - d_2)(2a\delta + b + d_2)} \right] \frac{1}{v_0 d_2} \quad (3)$$

Так как в статически определимой конструкции не происходит перераспределения внутренних усилий в элементах (они определяются из уравнения равновесия), то точное решение задачи долговечности может быть получено непосредственно из аналитических уравнений, определяющих долговечность в растянутых или сжатых стержнях произвольного поперечного сечения. Эти аналитические формулы используются также для приближенной оценки долговечности статически неопределимых конструкций. В (2) и (3) приняты следующие обозначения: Q – осевая нагрузка; s – коэффициент формы сечения; P_0 и F_0 – соответственно периметр и площадь сечения в начальный момент времени. В зависимости от формы поперечного сечения стержня ($s = \pi$ для круглого сечения и $s = 4$ для фасонных профилей), а также от требуемой точности, возможны различные варианты решения.

Здесь также $t_0 = \frac{\delta}{v_0}$; $a = s$; $b = -P_0$; $c = F_0 + kQ$. Тогда дискриминанты

$d_1 = \sqrt{4ac - b^2}$ и $d_2 = \sqrt{b^2 - 4ac}$ запишутся следующим образом:

$d_1 = \sqrt{4s(F_0 + kQ) - (-P_0)^2}$ и $d_2 = \sqrt{(-P_0)^2 - 4s(F_0 + kQ)}$ соответственно.

Решение (2) реализуется при $4ac - b^2 > 0$, решение (3) – при $4ac - b^2 < 0$.

В процессе решения задачи долговечности в зависимости от текущих значений геометрических размеров сечений элементов и напряжений, возникающих в них, знак дискриминанта может изменяться. Такая возможность была предусмотрена и, для ее реализации были получены аналитические зависимости для данных случаев. Однако, если в какой-то текущий момент времени происходит смена знака дискриминанта, то это означает, что в данной точке происходит некий «скачок», то есть переход от одной аналитической зависимости к другой. Возникает вопрос о том, какой будет погрешность решения задачи долговечности, если не учитывать возможность такого скачка. Целью данной работы является определение такой погрешности.

В полученных формулах значение времени определяется через значение глубины коррозии δ , соответствующее моменту исчерпания несущей способности стержня, которое заранее неизвестно. Для

растянутого стержня значение δ определяется из решения квадратного уравнения:

$$s\delta^2 - P_0\delta + F_0 - \frac{Q}{[\sigma]} = 0 \quad (4)$$

для сжатого – из решения нелинейного уравнения вида:

$$\frac{QL^2}{\pi^2 E} = I_{min}(\delta, t) \quad (5)$$

где $I_{min}(\delta, t)$ – значение минимального момента инерции, соответствующего моменту потери устойчивости стержня; L – длина стержня; E – модуль упругости.

В данной работе с целью изучения общих закономерностей поведения функций, описывающих известные аналитические зависимости (2) и (3), предлагается постановка задачи, где в качестве модели рассматривается стержень, нагруженный в осевом направлении силой Q и находящийся в агрессивной среде, вызывающей изменение его площади сечения. Для определенности предполагается, что стержень имеет кольцевое поперечное сечение, а коррозионный износ описывается уравнением (1).

Параметры стержня и механические характеристики его материала полагаем известными: площадь сечения $F_0 = 20 \text{ см}^2$, коэффициент слитности $\eta = \frac{P_0}{F_0} = 0,8 \text{ см}^{-1}$ (отношение значения периметра к значению площади сечения в начальный момент времени); предельное значение напряжений $[\sigma] \leq 1250 \text{ МПа}$. Величина приложенной нагрузки $Q = 5000 \text{ кг}$. Параметры агрессивной среды: $v_0 = 0,1 \text{ см/год}$; $k = 0,0003 \text{ МПа}^{-1}$.

Условия эксплуатации стержня таковы, что коррозии подвергается как внешняя, так и внутренняя поверхность стержня. Долговечность проекта при шаге по времени $\Delta t = 0,001$ составила $t = 15,34 \text{ лет}$. На рис.1 представлена зависимость текущих значений напряжений от времени в постановке, используемой ранее, которая учитывает изменение знака дискриминанта. Здесь точка $A (0,665; 264,971)$ – это точка, в которой значение дискриминанта квадратного уравнения изменилось с отрицательного на положительное. Таким образом, на интервале $(0; \tilde{t})$ значение долговечности определяется по формуле (2), а на интервале $(\tilde{t}; t^*)$ – с

помощью формулы (3). Представляется интересным исследовать особенности поведения функции в окрестности этой точки.

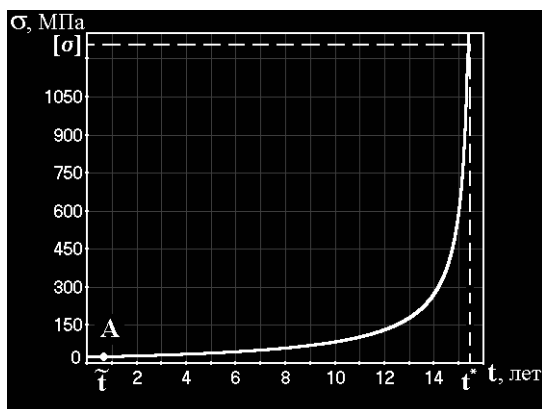


Рисунок 1

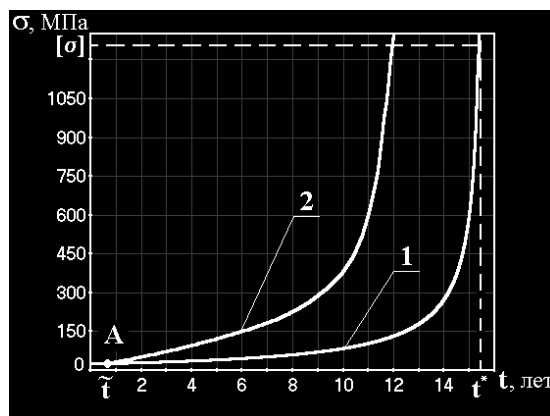


Рисунок 2

Очевидно, что на интервале $(0; \tilde{t})$ функция изменяется по определенному закону, например, (2). Далее, если в точке A знак дискриминанта не изменяется, то и функция описывается по тому же закону (кривая 1 (рис. 2)):

$$t_{1i} = f_1(\sigma_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Однако, если в точке A знак дискриминанта изменился на противоположный, то соответственно, согласно предложенному ранее алгоритму, выбирается и другая расчетная формула (3). А, значит, и функция будет иметь другой качественный вид, например описываемый кривой 2 (рис. 2):

$$t_{2i} = f_2(\sigma_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Таким образом, если происходит смена знака дискриминанта функции следовательно, решение имеет качественное отличие, обусловленное видом функции, то значение долговечности может быть найдено либо приближенно с определенной погрешностью, если графики этих функций будут расположены достаточно близко друг к другу, либо вообще найдено неверно – в противном случае.

Целью работы является исследование решений задачи для установления их возможных качественных и количественных расхождений. Предлагается воспользоваться методикой со сменой параметра интегрирования для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процесс коррозии. Если ранее интегрирование проводилось по времени, то теперь будем использовать в качестве параметра интегрирования – напряжение.

Рассмотрим две постановки задачи – постановку 1, когда изменение знака дискриминанта не учитывается, и постановку 2, когда эта смена учитывается. В случае постановки 1 текущее значение напряжения на каждом шаге зависит от начального значения напряжения:

$$\sigma_n = f(\sigma_0) \quad (8)$$

Таким образом, определение текущих значений напряжения, а соответственно и времени, проводится от одной начальной точки, как по напряжению, так и по времени. Результаты численных решений в постановке 1 представлены на рис. 3.

Далее рассматривается постановка 2, учитывающая смену знака дискриминанта в точке А. При этом текущие значения напряжения, а, следовательно, и времени на каждом шаге определяются, используя информацию, полученную на предыдущем шаге:

$$\sigma_n = f(\sigma_{n-1}). \quad (9)$$

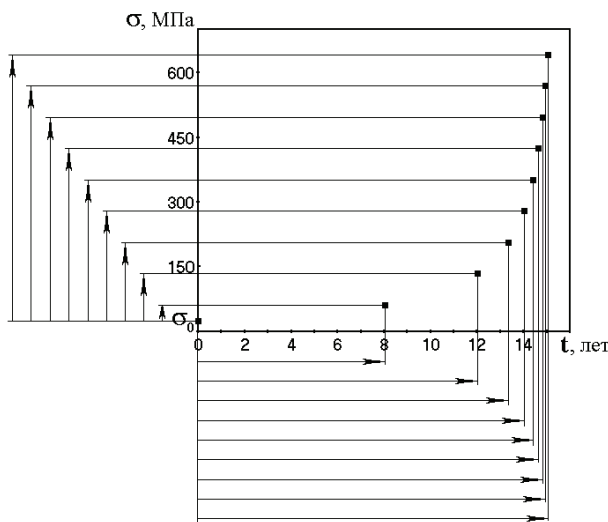


Рисунок 3

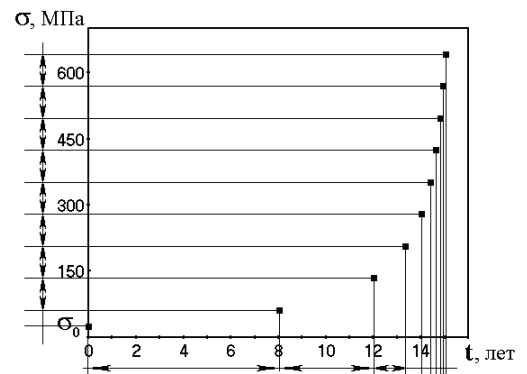


Рисунок 4

В результате численного решения задачи в двух постановках получены следующие результаты. Значения времени до разрушения на каждом шаге интегрирования в постановке 1 и в постановке 2 совпали с точностью до пятого знака после запятой. Эти, на первый взгляд, парадоксальные результаты дают основание предположить, что в области решения задачи рассматриваемые функции (2) и (3) эквивалентны.

С помощью математического аппарата теории катастроф попытаемся выяснить, почему одну и ту же физическую величину

описывают разные функции; исследуем поведение этих функций и возможность перехода от одной функции к другой.

Введем следующие обозначения:

если $b^2 < ac$, то функция в обобщенном виде запишется следующим образом:

$$f(\delta) = \operatorname{arctg} \frac{2a\delta + b}{d_1} - \operatorname{arctg} \frac{b}{d_1} \quad (10)$$

в противном случае – если $b^2 > ac$, то используем следующую зависимость:

$$g(\delta) = \ln \left[\frac{(2a\delta + b - d_2)(b + d_2)}{(2a\delta + b + d_2)(b - d_2)} \right] \quad (11)$$

Ввиду того, что результаты расчетов дали абсолютное совпадение значений этих функций, можно сделать вывод, что на каком-то интервале функции $f(\delta)$ и $g(\delta)$ качественно подобны.

При рассмотрении данного физического процесса удобно выделить некоторую произвольную систему координат, назовем ее исходной.

В терминах теории катастроф, две функции локально-эквивалентны, если существует локальный диффеоморфизм $y(\delta)$ такой, что выполняется равенство:

$$g(\delta) = f(y(\delta)) + \gamma, \quad (12)$$

где γ – сдвигающий член, позволяющий вернуться в начало координат исходной системы [3-4].

Согласно определению диффеоморфизма [3] функция $y(\delta)$ удовлетворяет трем условиям: она гладкая, для нее существует обратная функция, и эта обратная функция гладкая.

Используя это определение и зависимость (12), получим:

$$y(\delta) = \operatorname{tg} \{ \ln[\delta] - \gamma \}. \quad (13)$$

Переход в формуле (12) от δ к y рассматривается, как переход к новым координатам. Здесь y – гладкая обратимая локальная замена координат, а сдвигающий член γ необходим для того, чтобы вернуть значение функции в нуле к исходному. Понятно, что от него можно избавиться при помощи соответствующего сдвига начала системы координат. Таким образом, с помощью локальной эквивалентности функций можно выразить одну функцию через другую с точностью до константы γ .

В теории катастроф одна из теорем позволяет приводить функции к простому виду, удобному для классификации, с помощью координатных замен. Приведем ее на языке оригинала [3]:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: R \rightarrow R$ – гладкая функция, для которой $f(0) = Df|_0 = \dots = D^{k-1}f|_0 = 0$, но $D^k f|_0 \neq 0$. Тогда с помощью некоторой гладкой локальной замены координат ее можно привести к виду:

x^k при нечетном k ,

$\pm x^k$ при четном k ,

причем в последнем случае знак совпадает со знаком $D^k f|_0$.

Здесь $D^k f|_0$ – производная i -го порядка в точке 0 , где $i = \overline{0, k}$.

В нашем случае функции $f(\delta)$ и $g(\delta)$ имеют непростой аргумент δ , то есть на самом деле являются сложными функциями (формулы (2) и (3)). В дальнейшем будем использовать обозначения функций $f(\delta)$ и $g(\delta)$, но иметь это в виду. Для удобства использования функции $f(\delta)$ преобразуем ее к виду:

$$f(\delta) = \operatorname{arctg} \left[\frac{2a\delta d_1}{d_1^2 + (2a\delta + b)b} \right] \quad (14)$$

Попытаемся найти такую гладкую локальную замену координат с помощью, которой функции $f(\delta)$ и $g(\delta)$ представляются посредством степенных функций. Очевидно, что такие функции удовлетворяют условиям теоремы 1: $Df_{\delta=0} = \frac{2ad_1}{d_1^2 + b^2} \neq 0$ и

$Dg_{\delta=0} = \frac{4ad_2}{b^2 - d_2^2} \neq 0$, где $\delta = 0$ – не критическая точка. Следовательно,

можно утверждать, что некоторая гладкая локальная замена координат существует, то есть существует функция $y(\delta)$. Тогда, используя определение локально-эквивалентных функций в окрестности какой-либо точки (12), получим представление одной функции через другую:

$$y(\delta) = \operatorname{tg} \left\{ \ln \left[\frac{(2a\delta + b - d_2)(b + d_2)}{(2a\delta + b + d_2)(b - d_2)} \right] - \gamma \right\} \quad (15)$$

Согласно классификационной теореме Тома [4] семейство функций $f(\delta)$ будет структурно устойчиво и локально-эквивалентно в окрестности точки $\delta = 0$ (является не критической и устойчива в том

смысле, что малые возмущения устраняются простой перепараметризацией области определения) канонической форме $f(\delta) \doteq \delta_1$ (ввиду громоздкости текста теоремы ее полная формулировка не приводится). Здесь знак \doteq означает «... равно после гладкой замены переменных ...» [3-4]. Аналогично для семейства функций $g(\delta)$: $g(\delta) \doteq \delta_2$. Очевидно, что аналогичные результаты были получены и с помощью теоремы 1.

Если принять (a, b, c) за координаты точки в трехмерном пространстве (R^3) и рассмотреть множество точек поверхности, удовлетворяющих условию $b^2 = ac$, то это будет двойной конус (так называемый дискриминантный) с вершиной в начале, содержащей оси a и c . Если $b^2 > ac$ (внешняя поверхность конуса), то расчет проводится с помощью функции (11), в противном случае $b^2 < ac$ (внутри конуса) – функции (14).

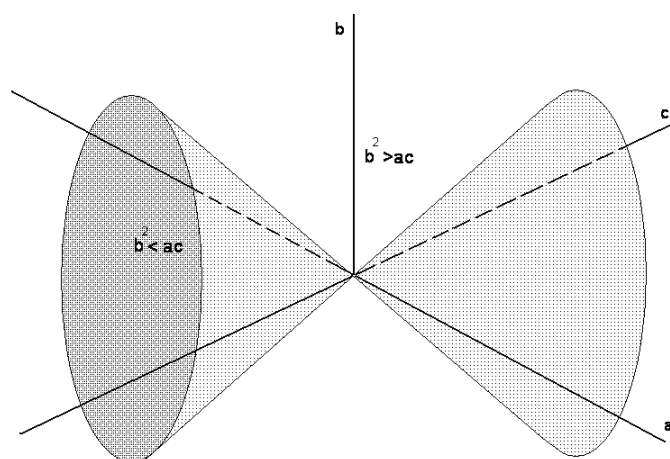


Рисунок 5

Очевидно, что в данном случае конус – это бифуркационное множество, обладающее двойственностью. Когда параметры системы, плавно изменяясь, пересекают поверхность $b^2 = ac$, то система скачком переходит из одного состояния устойчивого равновесия в другое. Так как функции эквивалентны, то расчет можно проводить используя одну из них. Тогда может возникнуть вопрос, будет ли точка бифуркации, точнее бифуркационное множество, при $b^2 = ac$. Как показали результаты численного эксперимента, значения таких различных функций как арктангенс и натуральный логарифм совпадают с точностью до пятого знака, что свидетельствует о

качественном изменении поведения функций. А, следовательно, можно утверждать, что бифуркационное множество существует.

Вывод. Подытоживая все изложенное, можно утверждать, что в данном случае переход от одной функции к другой возможен в силу их эквивалентности. В реальных ситуациях, когда предельное значение напряжений не превышает текущее значение целесообразно использовать следующую формулу для определения долговечности корродирующих стержневых элементов:

$$t = t_0 - \frac{2kQ}{v_0|d|} \left\{ \operatorname{arctg} \left[\frac{2a\delta + b}{|d|} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{b}{|d|} \right] \right\} \quad (16)$$

где $d = \sqrt{|b^2 - ac|}$, $d \neq 0$.

Таким образом, с помощью теории катастроф удалось объяснить особенности поведения вещественных гладких функций в процессе решения задач долговечности многоэлементных стержневых конструкций, работающих в условиях коррозионного износа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долинский В.М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии // Исследования по теории оболочек. – Казань, 1976. – Вып. 7. – с. 37 – 42.
2. Зеленцов Д.Г. Расчет конструкций с изменяющейся геометрией в агрессивных средах. Стержневые системы. – Днепропетровск: УГХТУ, 2002. – 168 с.
3. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – Москва: Мир, 1980. – 607 с.
4. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Книга 1. – Москва: Мир, 1984. – 350 с.

Получено: 12.06.2007 г.