УДК 62-50:519.49

В.М. Григорьев

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Актуальность темы. Широкий класс объектов и систем управления адекватно представляются в виде системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений с производными в правой части. Необходимость в их представлении в пространстве состояний возникает при решении обширного класса задач.

Анализ последних исследований. В рамках полиномиального подхода к задаче реализации в пространстве состояний линейных стационарных систем получены необходимые и достаточные условия решения вопроса [1]. В данной работе предпринята попытка обобщить эти результаты на нестационарный случай.

Постановка задачи. Получить необходимые и достаточные условия представимости системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений с производными в правой части в виде системы уравнений первого порядка в пространстве состояний. Предложить процедуру реализации системы в пространстве состояний. Выяснить условия физической реализуемости систем управления.

Обоснование полученных результатов. В качестве модели линейной нестационарной системы управления (ЛНСУ) будем использовать систему линейных нестационарных дифференциальных уравнений, записанную в операторной форме

$$A_l x = B_l u, \tag{1}$$

где $A_l \in R^{n\times n}$, $B_l \in R^{n\times m}$, $u \in X^m$. Здесь R – кольцо линейных нестационарных дифференциальных операторов с коэффициентами из произвольного поля Q функций времени t, замкнутого относительно дифференцирования, X - пространство сигналов, состоящее из бесконечнодифференцируемых, за исключением конечного числа точек, функций.

В качестве моделей ЛНСУ рассмотрим также последовательное соединение двух систем:

$$x = B_r z,\ A_r z = u, \tag{2}$$

где $x \in X^n$, $u \in X^m$, $B_r \in R^{n\times m}$, $A_r \in R^{m\times m}$.

Назовём систему (1) (соответственно (2)) правильной, если матрица формальных передаточных функций [2] над телом $K_l = A_l^{-1}B_l$ ($K_r = B_rA_r^{-1}$) правильная [3]. В ряде работ это свойство называется причинностью. Если же K_l (K_r) -строго правильная матрица, то так же будем называть и систему.

В этой работе показано, что правильные системы и только они допускают представление в пространстве состояний в указанном ниже смысле. Изучается возможность физической реализации системы, позволяющей представить её в виде суперпозиции интеграторов, сумматоров и усилителей с переменными и ограниченными при $t\geq 0$ коэффициентами усиления.

Рассмотрим систему уравнений в пространстве состояний в операторной форме

$$\begin{aligned} py&=Fy+Gu, \\ x &= Hy+Lu, \end{aligned} \tag{3}$$

где F, G, H, L – матрицы коэффициентов над Q размером l на l, l на m, n на l, n на m соответственно. Матрица $M = pI_l - F$ правильна по строкам и столбцам. Причём в терминах работы [3] $C_E^c = C_E^r = I_l$, т.е. ранги ранги матриц C_E^c и C_E^r равны l и следовательно ранг матрицы M также равен l. Система (3) совместна, а матрица M обратима над телом частных R_q. Если для системы в качестве пространства сигналов взять факторпространство X/X_0 , то её можно переписать в виде формальной передаточной матрицы $x = Ku$, где $x \in (X/X_0)^n$, $u\in (X/X_0)^m$, $K = H\,(pI_l - F)^{-1}G+L$.

Определим, что система (1) или (2) реализуема, если найдутся такие матрицы коэффициентов F_i, G_i, H_i, L_i, i=1,2, что для некоторого целого числа l_i

$$A_l^{-1}B_l = H_1\,(pI_{l1} - F_1)^{-1}\,G_1+L_1 \tag{4}$$

или

$$B_rA_r^{-1} = H_2\,(pI_{l2} - F_2)^{-1}G_2+L_2 \tag{5}$$

Теорема. Для того, чтобы система (1) (соответственно (2)) была реализуема, необходимо и достаточно, чтобы она была правильной. Причём в (4) (соответственно в (5)) $L_1=0^{nxm}$ ($L_2=0^{nxm}$) тогда и только тогда, когда система (1) (соответственно (2)) строго правильная.

Необходимость. Пусть имеет место соотношение (4). Рассмотрим уравнение $M(pI_{l1} - F_1) = AH_1$ относительно $M\in (R)^{nxl1}$ и $A\in (R)^{nxn}$. Так как ранг $rk(pI_{l1} - F_1)$ полный, то среди его решений найдутся такие, что rk A= n. Используя предложение 1 из [3], добъемся у

 ISSN 1562-9945

матрицы A правильности по строкам. Тогда $A^{-1}M = H_1(pI_{l1} - F_1)^{-1}$. Матрица $(pI_{l1} - F_1)$ правильная по столбцам со степенями столбцов $cd_i(H) < cd_i(pI_{l1} - F_1)$, $i=1\ldots l1$. В силу [3], матрица $A^{-1}M$ будет строго правильной и для степеней строк имеем $rd_i(M) < rd_i(A)$, $i=1\ldots n$. Так как степени элементов матрицы коэффициентов G_1 равны нулю, то $rd_i(MG_1) \le rd_i(M)$, $i=1\ldots n$. Обозначим $B=MG_1$. Тогда $A^{-1}B = A_l^{-1}B_l$ – строго правильная матрица. При $L_1=0^{nxm}$ такой же будет и система (1). При ненулевой L_1 в (4) имеем $A^{-1}B + L_1 = A^{-1}(B + AL_1) = A_l^{-1}B_l$. В силу того, что степени элементов матрицы коэффициентов G_1 равны нулю, имеем $rd_i(B_l) \le rd_i(A_l)$. Согласно [3], матрица $A_l^{-1}B_l$, а следовательно и система (1) будут правильными. Для системы (2) доказательство аналогично.

Достаточность. Вначале, следуя [3], умножим систему (1) слева на элементарную матрицу, приводящую A_l к правильной по строкам матрице. Запишем элементы матриц в (1) в виде $\sum\limits_{i=0} p^{i}a_i$. Представим, следуя обозначениям [3], $A_l = \mathrm{diag}(p^{d1}, p^{d2} \ldots p^{dn})C^r_{Al} + (A_l)^r_L$, где $d_i = rd_i(A_l)$, $rd_i((A_l)^r_L) < d_i$, $i=1\ldots n$. Запишем $B_l = \mathrm{diag}(p^{d1}, p^{d2} \ldots p^{dn})C_{Bl} + (B_l)_l$, где $rd_i((B_l)_l) < d_i$, $i=1\ldots n$, причём C_{Bl} в общем случае не равно C^r_{Bl}. Если система (1) строго правильная, то ниже положим $R_l = B_l$, а в (4) возьмём $L_1=0^{nxm}$. В противном случае, обозначив $L_1 = (C^r_{Al})^{-1} C_{Bl}$, получим $B_l = R_l + A_lL_l$, где $rd_i(R_l) < d_i$, $i=1\ldots n$. Тогда

$$A_l^{-1}B_l = A_l^{-1}R_l + L_l, \tag{6}$$

где $A_l^{-1}R_l$ строго правильная матрица.

Обозначим $P_l = (A_l)(C^r_{Al})^{-1}$ и распишем матрицы поэлементно

$$P_1 = \frac{\sum\limits_{k=0}^{d1-1} p^k f_{1,1,k} \cdots \sum\limits_{k=0}^{d1-1} p^k f_{1,n,k}}{\sum\limits_{k=0}^{dn-1} p^k f_{n,1,k} \cdots \sum\limits_{k=0}^{dn-1} p^k f_{n,n,1}},$$

$$R_1 = \frac{\sum\limits_{k=0}^{d1-1} p^k h_{1,1,k} \cdots \sum\limits_{k=0}^{d1-1} p^k h_{1,n,k}}{\sum\limits_{k=0}^{dn-1} p^k h_{n,1,k} \cdots \sum\limits_{k=0}^{dn-1} p^k h_{n,n,1}},$$

$$(C^r_{Al})^{-1} = \frac{g_{1,1} \cdots g_{1,n}}{g_{n,1} \cdots g_{n,n}}.$$

$$F_1 = \begin{matrix} {}_1F_{1,1} & . \; . \; . & {}_1F_{1,1} \\ . & . \; . \; . \; . \; . & . \\ {}_1F_{n,1} & . \; . \; . & {}_1F_{n,n} \end{matrix}, \quad G_1 = \begin{matrix} {}_1G_{1,1} & . \; . \; . & {}_1G_{1,1} \\ . & . \; . \; . \; . \; . & . \\ {}_1G_{n,1} & . \; . \; . & {}_1G_{n,n} \end{matrix},$$

$H_1 = {}_1H_1 \dots {}_1H_n$,

где

$${}_1F_{i,i} = \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -f_{i,i,0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -f_{i,i,1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -f_{i,i,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -f_{i,i,di-1} \end{matrix}, \qquad {}_1H_i = \begin{matrix} 0 & \dots & 0 & g_{1,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g_{n,i} \end{matrix},$$

$${}_1F_{i,j} = \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -f_{i,j,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -f_{i,j,\,di-1} \end{matrix}, \; i \neq j, \qquad {}_1G_{i,j} = \begin{matrix} h_{i,j,0} \\ \dots \\ h_{i,j,\,di-1} \end{matrix}.$$

Матрицы F_1, G_1, H_1, ${}_1F_{i,j}$, ${}_1G_{i,j}$, ${}_1H_i$, элементы которых лежат в Q, имеют размеры l_1 на l_1, l_1 на m, n на l_1, d_i на d_j, d_i на 1, n на d_i, соответственно. Здесь $l_1 = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

Введём матрицу размером n на l_1: $S_l = diag(s_1\ s_2\ \dots\ s_n)$, $s_i = |1\ p \dots p^{di-1}|$. Из способа построения F_1 и H_1 следует, что $S_lF_1 + A_lH_1 = S_lpI_{l1}$ или $S_l(pI_{l1} - F_1) = A_lH_1$. Отсюда $H_1(pI_{l1} - F_1)^{-1} = A_l^{-1}S_l$. Поскольку $R_l = S_l\,G_1$, то, учитывая (6), подобно стационарному случаю [1], получаем $A_l^{-1}B_l = A_l^{-1}R_l + L_1 = H_1(pI_{l1} - F_1)^{-1}\,G_1 + L_1$.

Для системы (2) доказательство аналогично, но отличается способом построения матриц F_2, G_2, H_2, L_2.

Выделим в поле Q подкольцо Q_T, состоящее из функций, не имеющих полюсов при $0 \le t < \infty$(полюса в бесконечности допустимы). Рассмотрим в R подкольцо R_T операторов с коэффициентами из Q_T. Назовём систему (1) физически реализуемой, если для неё найдётся представление в пространстве состояний с ограниченными коэффициентами из Q_T. Очевидно, что, если система (1) правильная, элементы матриц лежат в R_T и матрица C^r_{Al} обратима над R_T, то она физически реализуема. Аналогичное утверждение имеет место и для системы, записанной в виде (2).

Эти утверждения не являются обратимыми, даже если исходно положить, что элементы матриц лежат в R_T. Рассмотрим систему вида (1) $(tp-1)x = t^2u$. Она физически не реализуема, так как $C^r_{Al} = t$ не обратима над Q_T. Поскольку $t^2\ \ p = (tp-1)\ t$, то система вида (2) $x = tz$, $pz = u$ ей эквивалентна и физически реализуема.

 ISSN 1562-9945

Таким образом, для физической реализации систем, целесообразно, в случае необходимости, использовать их эквивалентные представления.

Выводы. Показано, что правильные системы и только такие, допускают представление в пространстве состояний. Предложена процедура реализации. Получены достаточные условия физической реализуемости реализации в виде ограниченности её переменных коэффициентов усиления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wolovich W. A., Antsaclis P. The canonical diophantine equations with applications // SIAM J. Contr. and. Optimiz. 1984. v. 22. N 5. p. 777-787.
2. Григорьев В.М. Формальные передаточные функции для линейных нестационарных систем// Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 5 (28). - Днепропетровск, 2003. - С. 3–9.
3. Григорьев В.М. Правильные операторные матрицы // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 6 (41). - Днепропетровск, 2005. - С. 10–14.

Получено 03.10.06 г.