УДК 519.6

Е.Н. Ватченко, А.И. Деревянко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ МАЯТНИКА, УПРАВЛЯЕМОГО ВНЕШНИМ МОМЕНТОМ

Эффективность моделирования динамических систем (выбор вида модели) определяется, во-первых, дальнейшим использованием модели и, во-вторых, ограничениями диапазона поведения модели. В некоторых случаях эффективное моделирование поведения нелинейной системы основано на дифференциальных уравнениях.

Следует отметить, что реальные динамические системы являются диссипативными, т.е. такими для которых кластер начальных точек, занимающих конечный (ненулевой) объем пространства состояний, коллапсирует в кластер нулевого объема. Эволюция динамической системы допускает описание одномерным отображением на плоскости Пуанкаре только в случае существенной диссипативности и если соответствующая кривая имеет простую геометрию.

Постановка задачи. Классическим примером моделируемых систем является модель маятника, управляемого периодическим внешним моментом и испытывающего воздействие демпфирующего трения. Рассмотрим маятник, состоящий из массы m, расположенной на конце жесткого стержня нулевой массы, и длиной L, другой конец стержня фиксирован в точке вращения. Для этой модели уравнение эволюции имеет вид

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Lmg\sin\theta - \gamma\frac{d\theta}{dt} + A\cos(kt) \qquad \mathbf{(1)}$$

где θ - угол смещения от вертикали, γ - коэффициент трения, A - амплитуда внешней силы. В правой части уравнения первое слагаемое является моментом, обусловленным гравитацией, второе - определяет демпфирование, обусловленное трением, и третье - описывает внешний периодический момент.

Отношение полной механической энергии системы к энергии потерянной на диссипацию за период колебаний обратно пропорционально демпфированию. Значение момента измеряется в единицах произведения MgL, которое определяет момент, требуемый для удержания маятника в покое при $\theta = \pi/2$.

Основная часть. Введем в уравнение безразмерные переменные для формализации результатов численного моделирования и осуществим переход к дискретному времени выбрав шаг дискретизации $\Delta t=1/f_0$, где собственная частота колебаний маятника с малой амплитудой, при отсутствии внешнего воздействия и демпфирования равна $f_0 = \sqrt{g} \ /L$. Используя эти переопределения переменных, уравнение эволюции преобразуется к виду:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \frac{\gamma}{mL^2}\omega + \frac{A}{mL^2}u \qquad (2)$$
$$\frac{du}{dt} = -k\sin(Ds)\ ,$$

где s – безразмерное время, D – отношение частот f/f_0.

Анализ уравнений (2) показывает, что эволюция маятника, управляемого внешним периодическим моментом, осуществляется в трехмерном фазовом пространстве переменных: угол смещения - θ, угловая скорость - $\omega=d\theta/ds$, внешний момент – $U=F\cos(Ds)$. Трехмерность фазового пространства является необходимым условием [2]существования хаотических режимов поведения для системы (2).

Сечение Пуанкаре фазового пространства системы (1) при U=0 представляет последовательность значений фазовой переменной ω (угловая скорость) в дискретные моменты времени $S = t/\Delta t$. Эта последовательность является рекуррентной $\omega_{n+1}=\Phi(\omega_n)$ и может характеризовать эволюцию системы во времени. Конечно, дискретные значения переменной ω_n не отражают в деталях поведение других переменных в пространстве состояния системы (и всей системы в целом). Однако если в результате изменения характеристик системы имеет место удвоение периода для одной переменной, то это имеет место и для других переменных [1]. Следовательно, динамическая модель эволюции системы (1) может быть представлена как одномерное отображение, анализируя которое можно определить общую периодичность и бифуркации системы. Численное моделирование системы (1) показало, что $\omega_{n+1}=\Phi(\omega_n)$ имеет вид унимодальной зависимости и реализует переход к хаосу по сценарию удвоения периода (сценарий Фейгенбаума [2]). Возвратное отображение угловой скорости $\omega_{n+1}=\Phi(\omega_n)$, полученное по результатам моделирования при D=2/3, γ =1.0, A=2.5, имеет вид, представленный на рис.2 и хорошо согласуется с логистическим уравнением:

 ISSN 1562-9945

$$x_{n+1} = ax_n(x_n+1)_{1}. \tag{2}$$

Такое одномерное отображение реализует переход к хаотическому поведению по сценарию удвоения периода [1].

Следует отметить, что модель динамической системы в форме итерационного отображения имеет более широкий диапазон возможностей поведения, чем в случае дифференциальных уравнений, решение которых ограничено условием непрерывности. Это значит, что значение переменной, описывающей поведение системы, может изменяться скачком.

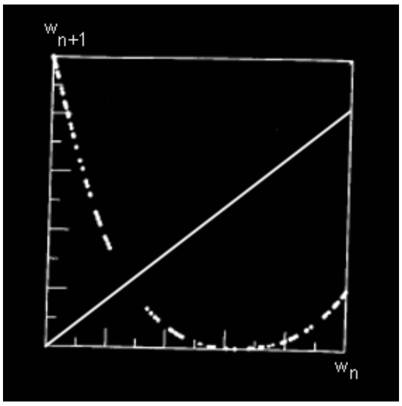

Рисунок 1 - Реконструкция сечения Пуанкаре фазового пространства по экспериментальным значениям временного ряда угловой скорости ω_n

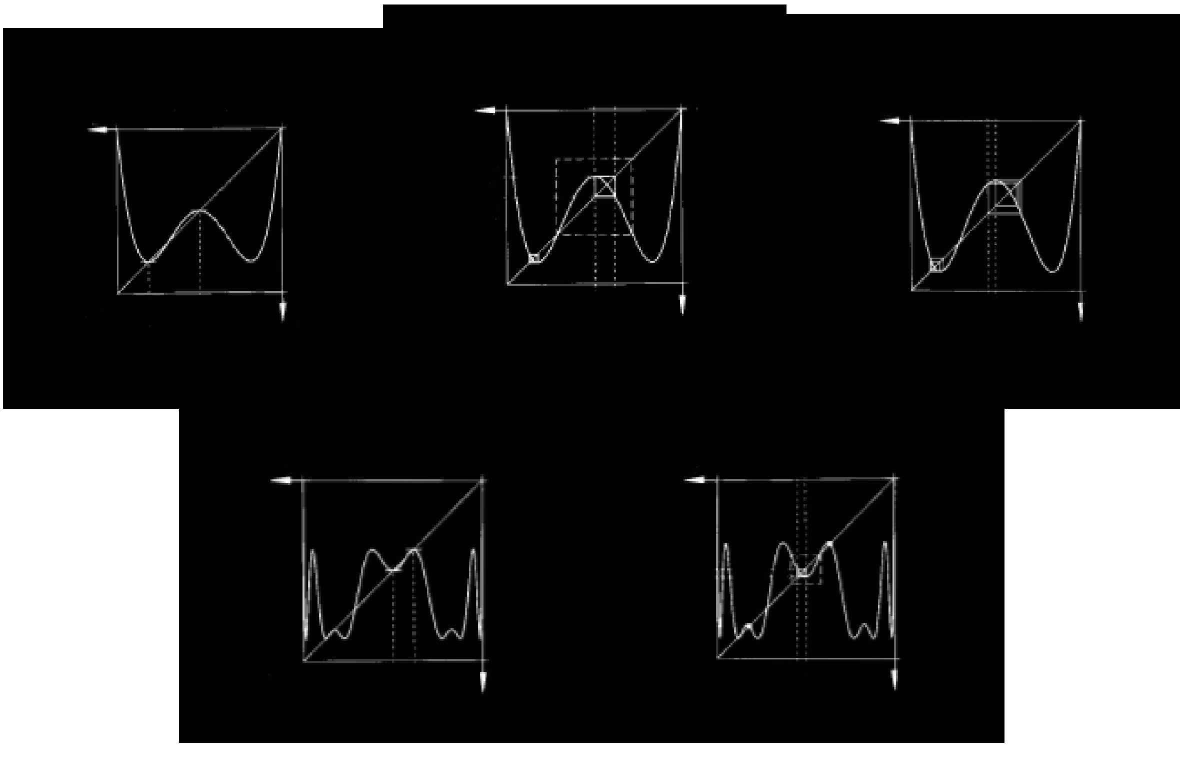

Рисунок 2 - Суперстабильные циклы логистического отображения при различных значениях a

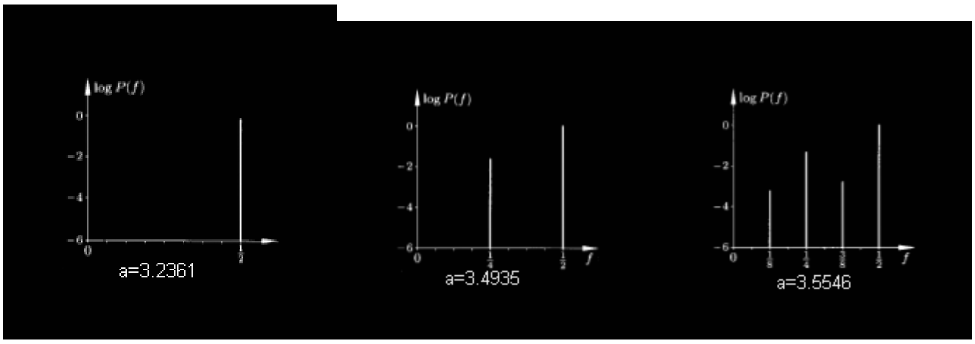

Рисунок 3 - Спектр мощности суперстабильных циклов логистического отображения при различных значениях а

Выводы. В условиях реального эксперимента исследуемая система является частично наблюдаемой, т.е., например, из трех переменных фазового пространства регистрируется временной ряд значений только одной из них. В этом случае построение моделей таких систем в форме дифференциальных уравнений является сложной задачей, требующей априорной информации о структуре системы (порядке дифференциального уравнения). Выходом из такой ситуации может быть использование одномерных отображений реализующих динамическую модель в виде возвратных одномерных отображений. Однако использование в качестве моделей динамических систем одномерных отображений, смягчающих требования к априорной информации, корректно реализуется только для систем осуществляющих переход к хаосу при изменении параметров по сценарию удвоения периода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Динамика одномерных отображений / Шарковский А.Н. и др. – Киев: Наукова думка, 1989. 216с.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос. –М.: Изд. физ. мат. литературы, 2001. 296с.

Получено 11.02.07.