УДК 681.3.07

Д.К. Киношенко

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАСТЕРИЗАЦИИ ПРИ ПОИСКЕ В КОЛЛЕКЦИЯХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Введение

Парадигма сравнения с эталоном является одной из важнейших в задачах обработки изображений и, вообще говоря, распознавания образов. Различие (сходство) между изображениями измеряется различными способами, но, естественно, предпочтение отдается метрикам. Напомним, что неотрицательная вещественная функция на некотором множестве X, т.е. $\rho : \mathrm{X}\times\mathrm{X} \to \mathbb{R}^{+}$, является метрикой, если для любых $x, y, z \in \mathrm{X}$, выполняются аксиомы:

– тождества, т.е. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

– симметрии, т.е. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

– неравенства треугольника, т.е. $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

При ослаблении аксиомы тождества (учете только рефлексивности, т.е. $\rho(x, y) = 0 \Leftarrow x = y$) функция ρ является псевдометрикой, т.к. могут существовать несовпадающие объекты, для которых $\rho(x, y) = 0$. Если не выполняется неравенство треугольника, то можно говорить лишь о мере сходства (расстоянии). Если же неравенство треугольника заменяется более сильным соотношением $\rho(x, z) \le max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$, то функция ρ представляет собой ультраметрику, обеспечивающую синтез иерархических структур.

В задачах обработки изображений чаще всего используются метрики: Манхэттанская, евклидова, Минковского. Однако расширение спектра решаемых задач, в частности, развитие информационно-поисковых схем контекстного поиска изображений, приводит к необходимости применения нетрадиционных мер сходство/различия, часто коррелирующих с интерпретацией изображений в конкретных предметных областях. В частности можно указать: метрику, трансформирующую локальную информацию в структурное сходство [1], функцию, учитывающую корреляцию между смежными пиками гистограмм [2], метрики, оценивающую сложность преобразований законов распределения (например, EMD – the Earth Mover's Distance) [3,4], модифицированную метрику Минковского, активирующую различные наборы признаков для различных объектов [5] и т.д. Обобщая анализ, следует подчеркнуть, что все метрики оперируют с парами объектов трех типов: точка – точка, точка – множество, множество –множество. Однако распространение кластерных подходов требует новых типов метрик, в частности, обеспечивающих сравнение множеств множеств – разбиений или покрытий исходных наборов данных. Работа посвящена исследованию метрики такого типа.

Постановка задачи

Задача сильной кластеризации (синтеза разбиений) в самом общем виде представляется отображением $\Phi:\Omega\to\Pi_\Omega$, где Π_Ω – разбиение множества Ω. Подчеркнем, что, с одной стороны, сегментация изображений – это типичная задача поиска кластеров в поле зрения с целью поиска областей, максимальным образом соответствующих носителям изображений наблюдаемых объектов [6]. С другой стороны, при поиске изображений в базах данных с запросом «ad exemplum» кластеризация в пространствах признаков или собственно изображений – основной инструмент, обеспечивающий приемлемое быстродействие [7]. Следует особо подчеркнуть особую роль вложенных разбиений множеств. Во-первых, они обеспечивают стратифицированный поиск в базах изображений, т.к. лежат в основе всех процедур иерархической кластеризации [8]. Во-вторых, поиск компромисса между недостаточной и чрезмерной сегментацией, т.е. определение рациональной степени детализации видеокадра оказывает существенное воздействие на алгоритмы интерпретации изображений в целом и, в частности, представляет интерес с точки зрения контекстного описания изображений при выполнении поиска [9]. Решение указанных задач невозможно без учета метрических свойств, обеспечивающих объективное сравнение вариантов разбиений. Цель работы – изучение возможностей определения сходства вложенных разбиений.

 ISSN 1562-9945

Пусть задано произвольное измеримое множество Ω с мерой $\mu(\Omega)<\infty$, т.е. для любого $A\subset\Omega$ существует конечное число $\mu(A)$ – мера (длина, площадь, объем, в конечном случае – количество элементов и т.п.). Пусть, кроме того, F_Ω - множество всех (измеримых) подмножеств.

Рассмотрим множество $\Pi_\Omega\subset F_\Omega$ конечных (по числу элементов) разбиений множества Ω таких, что $\beta\in\Pi_\Omega, \beta=\{B_j\}_{j=1}^m, B_j\in F_\Omega$, (рис. 1)

$$\left.\begin{aligned}\forall j,j'\in\{1,\ldots,m\}\ :\ j\neq j'\Rightarrow B_j\cap B_{j'}=\varnothing\\ B_1\cup\ldots\cup B_m=\Omega\end{aligned}\right\}\qquad\textbf{(1)}$$

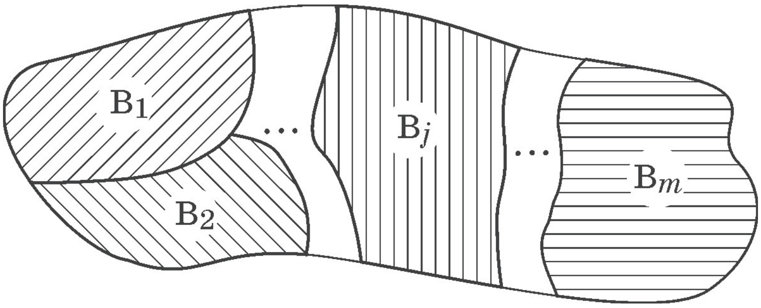

Рисунок 1 - Пример разбиения множества

На декартовом квадрате $\Pi_\Omega\times\Pi_\Omega$ функционал

$$\rho(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i\Delta B_j)\mu(A_i\cap B_j)\qquad\textbf{(2)}$$

где $\alpha,\beta\in\Pi_\Omega$ и $\alpha=\{A_i\}_{i=1}^n$, $\beta=\{B_j\}_{j=1}^m$, $A_i\Delta B_j=(A_i\backslash B_j)\cup(B_j\backslash A_i)$ – симметрическая разность, является метрикой [10,11]. Задача работы заключается в конкретизации функционала (2) для вложенных разбиений.

Метрика на вложенных разбиениях

Рассмотрим ситуацию, когда одно разбиение вложено в другое, т.е. обеспечивает более детальное представление информации, а фактически – «измельчает» его. Сформулируем это более точно.

Пусть имеются два разбиения $\alpha=\{A_i\}_{i=1}^n$ и $\beta=\{B_j\}_{j=1}^m$ произвольного множества Ω. Будем считать, что одно разбиение вложено в другое, например, $\alpha\subset\beta$.

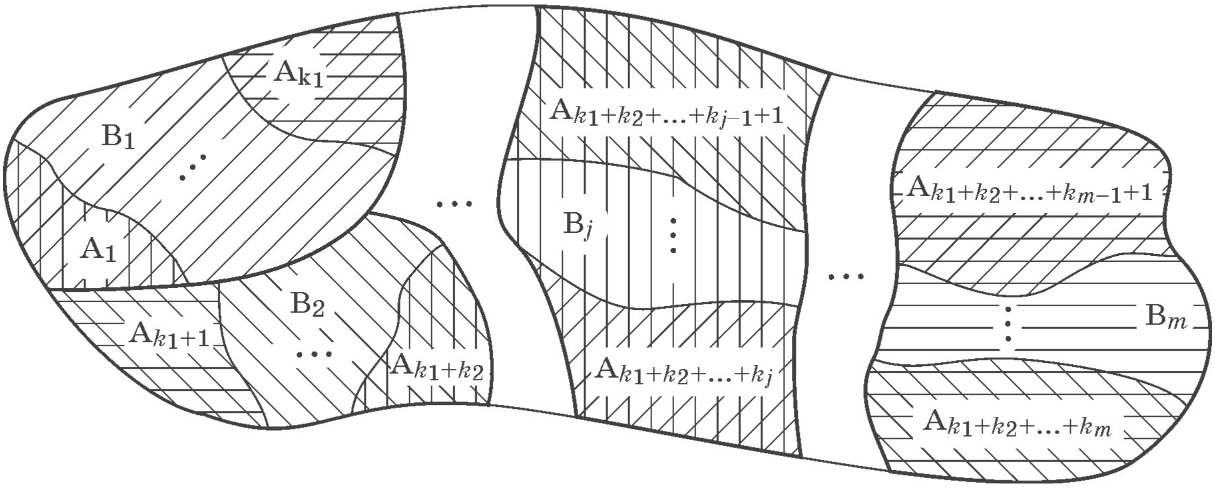

Рисунок 2 - Пример вложенных разбиений для рис. 1

В теоретико-множественном смысле вложенность $\alpha \subset \beta$ означает, что для любого $A_i \in \alpha$ найдется $B_j \in \beta$, для которых $A_i \subseteq B_j$. В общем случае α как разбиение «измельчает» разбиение β, т.е. в любом элементе разбиения $B_j \in \beta$ может находиться k_j элементов разбиения α, что схематично представлено на рис. 2.

Таким образом, нетрудно заметить, что разбиение β распадается на m подразбиений $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, т.е. $\alpha = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$, где

$$\begin{cases} \alpha_1 = \{A_1,\ldots,A_{k_1}\}; \\ \alpha_2 = \{A_{k_1+1},\ldots,A_{k_1+k_2}\}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_j = \{A_{k_1+k_2+\ldots+k_{j-1}+1},\ldots,A_{k_1+k_2+\ldots+k_j}\}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_m = \{A_{k_1+k_2+\ldots+k_{m-1}+1},\ldots,A_{k_1+k_2+\ldots+k_m}\}, \end{cases} \quad (3)$$

т.е. α_j $(j \in \overline{1,m})$ представляет собой разбиение множества B_j и содержит k_j элементов разбиения α с номерами от $k_1+k_2+\ldots+k_{j-1}+1$ до $k_1+k_2+\ldots+k_j$. При этом

$$B_j = \bigcup_{i=k_1+k_2+\ldots+k_{j-1}+1}^{k_1+k_2+\ldots+k_j} A_i$$

а $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$.

Для любой пары множеств A_i и B_j $(i \in \overline{1,n};\ j \in \overline{1,m})$ возможны три варианта:

а) $A_i \subset B_j$, когда $k_j \neq 1$ и $A_i \in \alpha_j$;

 ISSN 1562-9945

б) $A_i = B_j$ когда $k_j = 1$ и $\alpha_j = \{A_i\}$;

в) $A_i \bigcap B_j = 0$, когда $\alpha_j \notin \alpha_j$.

Если множество всех пар (i, j) разбить на три непересекающихся подмножества z_1, z_2, z_3, соответствующих указанным соотношениям, то функционал $\rho(\alpha,\beta)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\rho(\alpha,\beta) = &\sum_{(i,j)\in z_1} \mu(A_i \Delta B_j)\mu(A_i \bigcap B_j) + \\ &+ \sum_{(i,j)\in z_2} \mu(A_i \Delta B_j)\mu(A_i \bigcap B_j) + \\ &+ \sum_{(i,j)\in z_3} \mu(A_i \Delta B_j)\mu(A_i \bigcap B_j).\end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку в варианте *б*) $A_i \Delta B_j = \varnothing$, т.е. $\mu(A_i \Delta B_j) = 0$, а в варианте *в*) $A_i \bigcap B_j = \varnothing$, т.е. $\mu(A_i \bigcap B_j) = 0$, то в равенстве (4) два последних слагаемых станут равными 0. В итоге получаем

$$\rho(\alpha,\beta) = \sum_{(i,j)\in z_1} \mu(A_i \bigcap B_j) + \mu(A_i \Delta B_j) \tag{5}$$

Если учесть, что при $A_i \subset B_j$, $A_i \bigcap B_j = A_i$, $A_i \Delta B_j = B_j \setminus A_i$, то из (5) будем иметь

$$\rho(\alpha,\beta) = \sum_{(i,j)\in z_1} \mu(A_i \bigcap B_j) + \mu(A_i \Delta B_j) \tag{6}$$

При этом множества из разбиения α допускают естественную перенумерацию из двойных индексов с учетом равенств (3), т.е.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \{A_{11}, \ldots, A_{1k_1}\}; \\ \alpha_2 = \{A_{21}, \ldots, A_{2k_2}\}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_j = \{A_{j1}, \ldots, A_{jk_j}\}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_m = \{A_{m1}, \ldots, A_{mk_m}\}, \end{cases}$$

где $j \in \overline{1,m}$, а $B_j = \bigcup_{i=1}^{k_j} A_{ji}$. В этом случае

$$B_j \setminus A_{ji} = \bigcup_{l=1\,(l\neq i)}^{k_j} A_{jl} \tag{7}$$

$j \in \overline{1,m}$, $i \in \overline{1,k_j}$. Из (6) и (7) тогда вытекает

$$\rho(\alpha,\beta) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_j} \mu(A_{ji})[\sum_{i'=1\,(i'\neq i)}^{k_j} \mu(A_{ji'})] \tag{8}$$

т.е. расстояние между разбиениями α и β определяется мерами элементов разбиения α. Разбиение β (более «крупное») определяет только в какой, условно говоря, «комбинации» участвуют значения $\mu(A_{ji})$.

Укажем эквивалентную форму записи метрики (2).

В силу аддитивности меры для любых двух множеств X и Y имеем

$$\mu(X) = \mu(X \setminus Y) + \mu(X \cap Y),$$
$$\mu(Y) = \mu(Y \setminus X) + \mu(X \cap Y).$$

Принимая во внимание, что $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, получаем

$$\mu(X) + \mu(Y) = \mu(X \setminus Y) + \mu(Y \setminus X) + 2\mu(X \cap Y) = \mu(X \Delta Y) + 2\mu(X \cap Y)$$

откуда следует

$$\mu(X \Delta Y) = \mu(X) + \mu(Y) - 2\mu(X \cap Y)$$

Используя это равенство и полагая $X = A_i$, $Y = B_j$, находим

$$\rho(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \Delta B_j)\mu(A_i \cap B_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j)[\mu(A_i) + \mu(B_j) - 2\mu(A_i \cap B_j)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i)\mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)\mu(B_j \cap A_i) - 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [\mu(A_i \cap B_j)]^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) - 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [\mu(A_i \cap B_j)]^2.$$

В этой цепочке равенств выделим суммы вида $\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j)$ и $\sum_{i=1}^{n} \mu(B_j \cap A_i)$, для которых укажем достаточно очевидное, но важное свойство. Это свойство справедливо для любого подмножества (в первом случае – это A_i, во втором – B_j) и произвольного разбиения (в первом случае – это β, во втором – α). Рис. 3 иллюстрирует первый случай.

Нетрудно понять: при любых значениях i и j ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$) получаем, что $\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i)$, $\sum_{i=1}^{n} \mu(B_j \cap A_i) = \mu(B_j)$. Подставляя эти равенства в полученное для $\rho(\alpha,\beta)$ выражение, окончательно находим равносильное представление метрики (2)

$$\rho(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} [\mu(A_i)]^2 + \sum_{j=1}^{m} [\mu(B_j)]^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [\mu(A_i \cap B_j)]^2$$

 ISSN 1562-9945

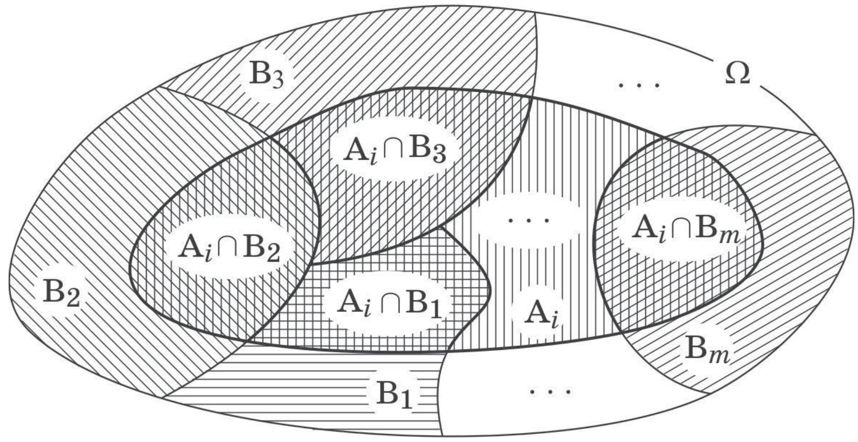

Рисунок 3 - К пояснению поиска пересечения подмножества и разбиения

Воспользуемся полученным соотношением. В рассматриваемой ситуации, поскольку для любого A_i найдется единственное $B_{j'}$, для которого A_i является подмножеством, то все суммы вида

$$\sum_{j=1}^{m}[\mu(A_i \cap B_j)]^2$$

трансформируются в одно слагаемое, т.е.

$$\sum_{j=1}^{m}[\mu(A_i \cap B_j)]^2 = [\mu(A_i \cap B_{j'})]^2 = [\mu(A_i)]^2$$

Тогда для функционала $\rho(\alpha,\beta)$ будет справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned}\rho(\alpha,\beta) &= \sum_{i=1}^{n}[\mu(A_i)]^2 + \sum_{j=1}^{m}[\mu(B_j)]^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\mu(A_i \cap B_j)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n}[\mu(A_i)]^2 + \sum_{j=1}^{m}[\mu(B_j)]^2 - 2\sum_{i=1}^{n}[\mu(A_i)]^2 = \\ &= \sum_{j=1}^{m}[\mu(B_j)]^2 - \sum_{i=1}^{n}[\mu(A_i)]^2.\end{aligned}$$

Окончательно, с учетом обозначения $S(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}[\mu(A_i)]^2$, мы можем сформулировать

Утверждение 1. Для любых двух конечных разбиений $\alpha,\beta \in \Pi_\Omega$ произвольного измеримого множества Ω, если $\alpha \subset \beta$, то

$$\rho(\alpha,\beta) = S_{(\beta)} - S_{(\alpha)}.$$

С другой стороны любой элемент разбиения β, т.е. множество B_j представляет собой объединение непересекающихся элементов разбиения α, а именно

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{k_j} A_{ji}, \ j \in \overline{1,m},$$

тогда

$$\sum_{j=1}^{m} [\mu(B_j)]^2 = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{k_j} \mu(A_{ji}))^2 = \sum_{j=1}^{m} \{\sum_{i=1}^{k_j} [\mu(A_{ji})]^2 + 2 \sum_{i=1}^{k_j-1} \sum_{i'=i+1}^{k_j} \mu(A_{ji})\mu(A_{ji'})\}. \quad \textbf{(10)}$$

Учтем теперь тот факт, что

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_j} [\mu(A_{ji})]^2 = S(\alpha) \quad \textbf{(11)}$$

поскольку в левой части равенства идет суммирование по всем элементам разбиения α.

Тогда из **(9)** – **(11)** вытекает

$$\rho(\alpha,\beta) = 2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_j-1} \sum_{i'=i+1}^{k_j} \mu(A_{ji})\mu(A_{ji'}) \quad \textbf{(12)}$$

Утверждение 2. Для любых двух конечных разбиений, удовлетворяющих условиям утверждения 1, функционал расстояния между ними через элементы вложенного (более «мелкого» разбиения) может быть выражен двумя способами (8) и (12). При этом для элементов разбиения α выполняется естественное равенство

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_j} \{\mu(A_{ji})[\sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{k_j} \mu(A_{ji'})]\} = 2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_j-1} \sum_{i'=i+1}^{k_j} \mu(A_{ji})\mu(A_{ji'}) \quad \textbf{(13)}$$

С другой стороны, пару конечных разбиений α, β, для которых имеет место вложение $\alpha \subset \beta$, можно рассматривать не как пару разбиений, а как «укрупнение» разбиения α. В этом случае, мы имеем дело с традиционной процедурой кластеризации, а элементы разбиения β фактически выступают в качестве кластеров. Теперь, если процедуру группировки обозначить в виде $K(\alpha)$, как функционального отображения элементов разбиения α в элементы разбиения β , т.е. писать $\beta = K(\alpha)$, где $K(\alpha)$ – набор произвольных групп $B_j, j = 1,2,\ldots,m$ элементов разбиения α, то всегда будет выполняться вложение $\alpha \subset K(\alpha)$.

Тогда мы получаем следствие из утверждения 1.

Следствие 1. Для любого конечного разбиения $\alpha \in \prod_{\Omega}$ множества Ω справедливо равенство

$\rho\left(\alpha, K(\alpha)\right) = S(K(\alpha)) - S(\alpha)$.

 ISSN 1562-9945

С другой стороны, нетрудно заметить, что для произвольного разбиения $\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ множества B имеет место

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\mu(\overline{A}_i) = 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i'=i+1}^{n} \mu(A_i)\mu(A_{i'}) \qquad \textbf{(14)}$$

где $\overline{A}_i = B \setminus A_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Действительно, в левой части этого равенства слагаемые представляют собой различные попарные произведения $\mu(A_i)\mu(A_{i'})$, когда $i \neq i'$. Причем $\mu(A_i)\mu(A_{i'})$ входят в два слагаемых для любой пары неравных номеров $i, i' \in \{1, 2, \ldots, n\}$, т.е.

$$\mu(A_i)\left[\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_{i'-1}) + \mu(A_{i'+1}) + \ldots + \mu(A_n)\right],$$
$$\mu(A_{i'})[\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_{i'-1}) + \mu(A_{i'+1}) + \ldots + \mu(A_n)].$$

Таким образом, возникает коэффициент 2 и сумма представляющая собой правую часть равенства (14).

В этом случае из равенств (13) и (14) получаем.

Следствие 2. Равенство (13) может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{k_j} \{\mu(A_{ji})[\sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{k_j} \mu(A_{ji'})]\} = 2\sum_{i=1}^{k_j-1}\sum_{i'=i+1}^{k_j} \mu(A_{ji})\mu(A_{ji'})$$

Смысл этого следствия состоит в том, что равенство (13), на самом деле, имеет место внутри каждой группы (кластера), а не в суммарном виде.

Заключение

В работе получены соотношения для вычисления сходства между вложенными разбиениями, продуцируемыми процедурами кластеризации, в частности, при сегментации изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gao X., Wang T., Li J. A Content-based Image Quality Metric // Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing / D. Slezak et al. (eds.). – Lecture Notes in Computer Science – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. – Vol. 3642. – 2005 – P. 231-240.
2. Traina A.J.M., Traina Jr.C., Bueno J.M., Chino F.J.T., Azevedo-Marques P. Efficient Content-Based Image Retrieval through Metric Histograms // World Wide Web. – Vol. 6, No 2. – 2003. P. 157-185.
3. Rubner Y., Tomasi C., Guibas L.J. The Earth Mover’s Distance as a Metric for Image Retrieval // International Journal of Computer Vision. – Vol. 40, No 2. – 2000. – P. 99-121.
4. Sfikas G., Constantinopoulos C., Likas A., Galatsanos N.P. An Analytic Distance Metric for Gaussian Mixture Models with Application in Image

Retrieval // Artificial Neural Networks: Formal Models and Their Applications / W. Duch et al. (eds.). – Lecture Notes in Computer Science. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. – Vol. 3697. – 2005 – P. 835-840.

5. Li B., Chang E., Wu Y. Discovery of a Perceptual Distance Function for Measuring Image Similarity // Multimedia Systems. – Vol. 8, No 6. – 2003. – P. 512-522.
6. Jiang X. Performance evaluation of image segmentation algorithms // Handbook of pattern recognition and computer vision / C.H. Chen and P.S.P. Wang, (eds.). – Singapore: World Scientific. – 2005. – P. 525-542.
7. Kinoshenko D., Mashtalir V., Yegorova E. Clustering Method for Fast Content-Based Image Retrieval // Computer Vision and Graphics / K. Wojciechowski et al (Eds.) Computer Imaging and Vision. – Dordrecht: Springer. – Vol. 32. – 2006. – P. 946–952.
8. Kinoshenko D., Mashtalir V., Vinarsky V., Yegorova E. Hierarchical Partitions for Content Image Retrieval from Large-Scale Database // Machine Learning and Data Mining in Pattern Recognition / P. Perner, A. Imlya (eds.). – Lecture Notes in Artificial Intelligence. – Berlin Heidelberg: Springer–Verlag. – Vol. 3587. – 2005. – P. 445-455.
9. Chupikov A., Kinoshenko D., Mashtalir V., Shcherbinin K. // Image Retrieval with Segmentation-Based Query / S. Marchand-Maillet et al. (eds.). Lecture Notes in Computer Science. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. – Vol. 4398 – 2007. – P. 208-222.
10. Mashtalir V., Mikhnova E., Shlyakhov V., Yegorova E. A Novel Metric on Partitions for Image Segmentation // IEEE International Conference on Video and Signal Based Surveillance, avss. – Los Alamitos, CA, USA. – 2006. – P. 18.
11. Bobrowsky L., Mashtalir V., Shlyakhov V. Metrics on Arbitrary Partitions of Measurable Sets. In: Global Information Systems. Problems and Tendencies of Progress. – Kharkov, KhNURE. – 2006. – pp. 70–71.

Получено 10.03.07 г.