УДК 536/533+621.63

В.В. Гоцуленко

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ПРИ НАПОРНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ ИЛИ ГАЗОВ В ПНЕВМО ИЛИ ГИДРОСЕТИ КАК ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Введение. Автоколебания больших амплитуд создают различные аварийные ситуации в пневмо или гидросистемах промышленных агрегатов, а при отработке жидкостных реактивных двигателей (ЖРД) являются причиной разрушения конструкции и обусловлены явлениями или процессами, которые влияют на напор потока, его возрастание или рассеивание. В ЖРД такие колебания возбуждаются при вибрационном горении [1-2], неустойчивой работе (помпаже) [3] шнека шнеко-центробежного насоса, который работает перед срывом подачи [4].

Для теоретического описания явления помпажа [5] была использована напорная характеристика нагнетателя $H(x)$, которая в систему уравнений гидрогазодинамики была введена вместо уравнения энергии. Неустойчивая его работа [5] обусловлена наличием восходящей ветви характеристики $H(x)$. Помпаж шнека шнеко-центробежного насоса наблюдается нередко и при монотонно убывающей напорной его характеристике и обусловлен наличием восходящей ветви характеристики шнека, что экспериментально установлено при впуске воздуха в подвод магистрали [6], а при кавитационной работе, его возникновению способствуют возрастающие по характеру кавитационные разветвления $H(x,\Delta h)$ характеристики $H(x)$, которая может иметь монотонно падающий характер [3], где Δh- величина кавитационного запаса. Отметим, что природа автоколебаний, возбуждающихся перед срывом подачи лопастных насосов до опубликования работы [3] оставалась неизвестной [7].

Исследования вибрационного горения как нестационарности, имеющей теплогидродинамическую природу [8], согласно Б.В. Раушенбаху [1] прямого отношения к вибрационному горению не имеют.

 ISSN 1562-9945

В работах [9-10] дано описание явления возбуждения термоакустических автоколебаний феномена Риййке как при подводе теплоты от электроспирали, так и при ее выделении от сгорания топлива, где была введена напорная характеристика $H(x)$ как зависимость напора от расхода x из-за преобразования в него части подводимой теплоты.

Постановка задачи. Модели рассмотренных выше задач термогидрогазодинамики сводятся к следующей динамической системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha\left(H(x) - y\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta\left(x - \xi\left(\dfrac{H_o - y}{H_o - Y_o}\right)^a\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $H(x) = Y_o + \Psi(x - \xi)$, $\Psi(x) = -\gamma x(x - b_1)(x - b_2)$, $\gamma > 0$, $b_1 \cdot b_2 < 0$, $H_o, Y_o = const$, $\xi > 0$, $0 \le a < 1$.

Вопрос о существовании в системе (1) периодического решения рассматривался во многих работах [5,9,10]. Согласно теореме Андронова существование периодического решения в (1) эквивалентно наличию у нее предельного цикла. Отметим, что из элементарного анализа лишь самого понятия асимптотической устойчивости (по Ляпунову) следует, что для автономной системы любой размерности, ее периодическое решение не может быть асимптотически устойчивым. Однако нетрудно проверить, что устойчивому предельному циклу соответствует устойчивое периодическое решение, и обратно. Следовательно, существование и характер устойчивости периодического решения системы (1), эквивалентен этому же вопросу о ее предельном цикле.

В данной работе на основании численной реализации отображения Пуанкаре рассмотрен вопрос о существовании и характере устойчивости предельного цикла для системы (1).

Анализ существования предельного цикла и его устойчивости в терминах отображения Пуанкаре. Определение отображения Пуанкаре (функция последования, монодромия, голономия) и ее связь с предельными циклами рассмотрено, например в [5]. Для системы (1) функция последования $\Phi(A)$ имеет вид (рисунок 1):

$$\forall\ A\ \ \Phi:\ A \to\ \Phi(A) \equiv y(\tau, \xi, A),$$

где $\tau \equiv min\{t > 0 : x(t, \xi, A) = \xi\}$; $x(t, x_o, y_o)$, $y(t, x_o, y_o)$- решение системы (1) с начальными данными: $x_o \equiv x(0, x_o, y_o)$, $y_o \equiv y(0, x_o, y_o)$.

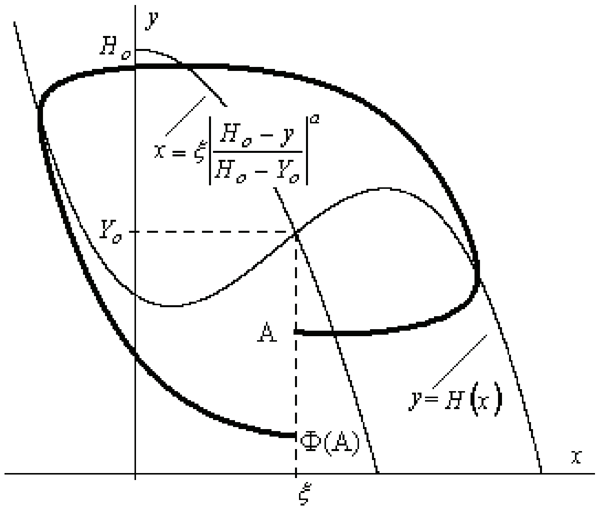

Рисунок 1 - Функция последования

ЛЕММА. Если $\tilde{A}$ простой корень уравнения $\Phi(A) = A$, то система (1) имеет единственный предельный цикл, устойчивый при $\left.\frac{d\Phi}{dA}\right|_{A=\tilde{A}} < 1$ и неустойчивый в противном случае.

Доказательство. Прежде всего, по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши заключаем, что фазовая траектория решения системы (1) с начальным условием $x|_{t=0} = \xi$, $y|_{t=0} = \tilde{A}$ является замкнутой, а из простоты корня $\tilde{A}$, получаем, что она является предельным циклом. Далее, полагая $\delta A = A - A_o$, получим:

$$\Phi(A) - A = \Phi(A) - \Phi(A_o) + A_o - A = -\delta A(1 - \Phi'(A_o)) + O(\delta A)^2 \Rightarrow \text{ при } \delta A \to 0$$

$sgn(\Phi(A) - A) = -sgn(\delta A(1 - \Phi'(A_o)))$, и, следовательно, при $1 - \Phi'(A_o) > 0$ имеем: $sgn(\Phi(A) - A) = sgn(A_o - A) \Rightarrow \Phi(A) < A$ при $A_o < A$ и $\Phi(A) > A$ при $A_o > A$, т.е. фазовые кривые как изнутри, так и снаружи приближаются к предельному циклу, т.е. цикл устойчивый. Аналогично рассматривается случай $1 - \Phi'(A_o) < 0$.

Численная реализация функции последования. Аналитическое представление для функции последования получить проблематично, т.к. при вычислении ее значений необходимо интегрировать нелинейную систему (1). Для вычисления $\Phi(A)$ применим метод

Эйлера с переменным шагом для численного интегрирования (1). Полагая $G(x,y)=\alpha(H(x)-y)$, $F(x,y)=\beta\left(x-\xi\left(\dfrac{H_o-y}{H_o-Y_o}\right)^a\right)$, положим $\Phi(A)\approx y_N$, где N: $|x_N-\xi|<E$, $\left(n=\overline{0;N-1}\right)$

$$y_N=A+\varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}\frac{F(x_n,y_n)}{\sqrt{F^2(x_n,y_n)+G^2(x_n,y_n)}},\ \begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}\dfrac{G(x_n,y_n)}{\sqrt{F^2(x_n,y_n)+G^2(x_n,y_n)}}\\ \dfrac{F(x_n,y_n)}{\sqrt{F^2(x_n,y_n)+G^2(x_n,y_n)}}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_o\\ y_o\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\ A\end{pmatrix},$$

E, ε - малые положительные константы. Приведенный алгоритм был реализован в математической среде Mathcad. На рисунке 2 приведены Mathcad- функция для отображения Пуанкаре и диаграмма Ламерея (ее график) для системы (1).

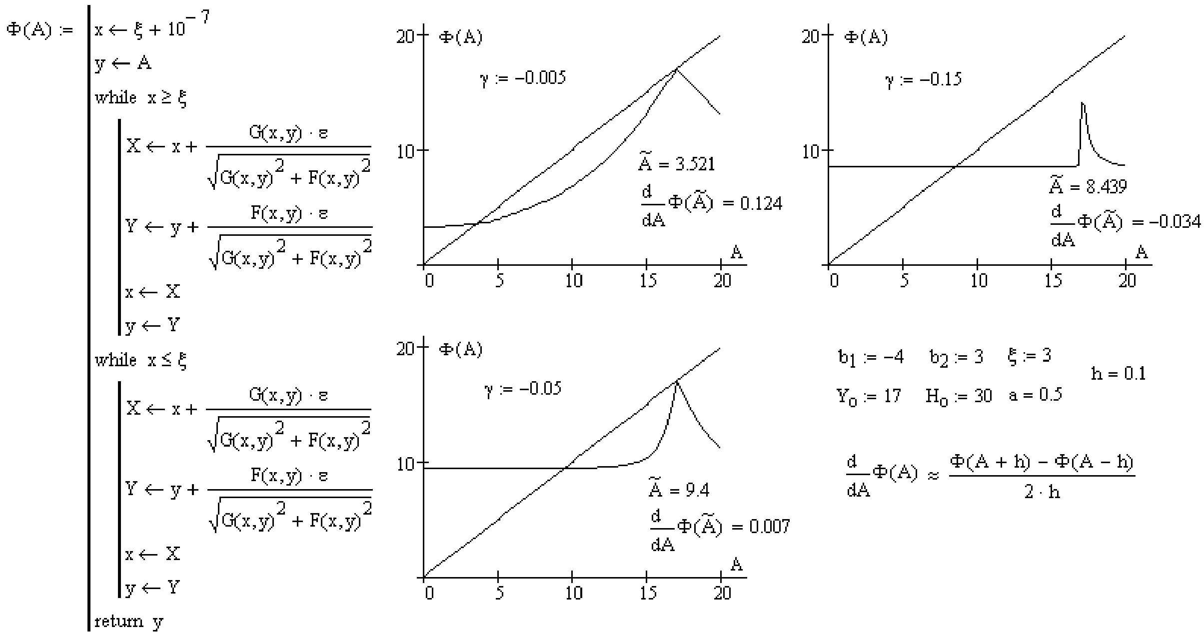

Рисунок 2 - Mathcad- функция отображения Пуанкаре и ее диаграммы Ламерея при варьировании параметра γ

Замечание. Отметим, что при приближении A к значению Y_o диаграмма Ламерея заостряется и в некоторых случаях фактически касается диагонали, так что создается видимость существования второго корня у уравнения *Φ(A) = A*.

Выводы

В терминах отображения Пуанкаре получены необходимые и достаточные условия для установления существования и характера устойчивости предельного цикла.

В математической среде Mathcad получена численная реализация отображения Пуанкаре, которая позволила в рассматриваемой динамической системе установить существование единственного устойчивого предельного цикла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. М.: Физматтиз, 1961, 500с.
2. Натанзон М.С. Неустойчивость горения. - М.: Машиностроение, 1986.-247с.
3. Гоцуленко В.Н., Гоцуленко Н.Н. Эксперементальное исследование автоколебаний в системе, включающей лопастной насос с монотонно убывающей напорной характеристикой // Энергомашиностроение. – 1978. -№ 5. -С. 44-45.
4. Чебаевский В.Ф., Петров В.И. Кавитационные характеристики высокооборотных шнеко - центробежных насосов. - М.: Машиностроение, 1973. - 152с.
5. Казакевич В.В. Автоколебания (помпаж) в компрессорах, 2-е изд.- М.: Машиностроение, 1974. - 264с.
6. Водяницкий В.П. Возникновение автоколебаний в гидравлической системе при подаче свободного газа на вход в насос. –В кн. Кавитационные автоколебания в насосных системах. -К.: Наукова думка, 1976.-Ч.1. -С. 86-95.
7. Вильнер Я.М., Вопнярский И.П. и др. Лабораторный практикум по гидравлике и гидравлическим машинам (насосам). - Минск.: Высшая школа, 1967.-С. 169-170.
8. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
9. Гоцуленко В.В. Математическое моделирование особенностей феномена Рийке // Математическое моделирование, РАН, 2004. Т.16, .-№ 9. -С. 23-28.
10. Гоцуленко В.В. Математическое моделирование снижения амплитуд колебаний вибрационного горения в крупних промышленных агрегатах // Математическое моделирование, РАН, 2005. Т.17, .-№ 11. -С. 16-24.

Получено 18.09.2006 г.

 ISSN 1562-9945