УДК 539.3

И.Ю. Наумова

ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МНОГОСЛОЙНОГО ПАКЕТА ПЛАСТИН

Введение

В классической теории рассматриваются слоистые пластины и оболочки относительно характера деформирования которых, вводятся гипотезы [1,2]. В предлагаемой работе многослойная пластина рассматривается как пакет пластин. Для каждого слоя используются уточненные уравнения теории пластин, приспособленные к решению контактных задач [3] со специальными коэффициентами [4], дающими возможность получить распределение взаимодействия между слоями достаточно близкое к действительному при любой нагрузке на лицевой поверхности пакета.

Постановка задачи

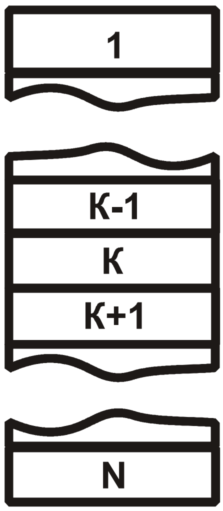

Рисунок 1

Рассмотрим отдельно в качестве объекта деформирования пакет N одинаковых в плане пластин, соединенных между собой либо жестко (сцепленный пакет при цилиндрическом изгибе, осесимметричном изгибе, антиплоской деформации, кручении), либо только по нормали к поверхности (односторонний цилиндрический или осесимметричный изгиб). Будем вести счет пластин сверху вниз (рис.1).

Краевые условия на лицевых поверхностях для пакета в целом заданы в виде:

$$\Gamma^{(-1)} \cdot \begin{Vmatrix} U_1^{(-1)} \\ q_1^{(-1)} \end{Vmatrix} = Q^{(-1)}; \ \Gamma^{(+1)} \cdot \begin{Vmatrix} U_N^{(+1)} \\ q_N^{(+1)} \end{Vmatrix} = Q^{(+1)}, \qquad (1)$$

где

$U_1^{(-1)}$ - матрица перемещений на верхней лицевой поверхности пакета;

$U_N^{(+1)}$ - матрица перемещений на нижней лицевой поверхности пакета;

$q_1^{(-1)}$ - матрица нагрузок или контактных взаимодействий на верхней лицевой поверхности пакета;

$q_N^{(+1)}$ - матрица нагрузок или контактных взаимодействий на верхней лицевой поверхности пакета;

$\Gamma^{(-1)}$ - прямоугольная матрица, определяемая видом краевых условий верхней лицевой поверхности пакета;

$\Gamma^{(+1)}$ - прямоугольная матрица, определяемая видом краевых условий нижней лицевой поверхности пакета;

$Q^{(-1)}$ - матрица заданных перемещений или нагрузок на верхней лицевой поверхности пакета;

$Q^{(+1)}$ - матрица заданных перемещений или нагрузок на нижней лицевой поверхности пакета;

Краевые условия на торцах пластины должны быть заданы для каждой пластины в отдельности и могут быть представлены в форме

$$\Gamma_{\kappa,(j)} \cdot Z_\kappa^{(j)} = O_\kappa^{(j)}. \quad (2)$$

Здесь

$\kappa = 1,2,.....,N$ - номер пластины

$j = -1$ - левый торец пластины при цилиндрическом изгибе и антиплоской деформации или внутренний торец – при осесимметричном изгибе или кручении;

$j = +1$ - правый торец пластины при цилиндрическом изгибе и антиплоской деформации или внешний торец – при осесимметричном изгибе или кручении;

$\Gamma_{\kappa,(j)}$ - матрица, определяемая видом торцевых краевых условий;

$Z_\kappa^{(j)}$ - матрица значений переменных состояния или их комбинаций, выходящих на торцы пластины, определяемых из краевых условий;

$O_\kappa^{(j)}$ - заданные переменные состояния или их комбинации на торцах пластины.

Задача состоит в определении контактных взаимодействий между пластинами и между пакетом в целом и другими телами. согласно условиям (1). Используя дискретную постановку задачи, ее можно

 ISSN 1562-9945

свести к краевой задаче для пакета в целом как одной пластины. Это достигается путем исключения внутренних контактных взаимодействий между пластинами с помощью рекуррентных соотношений, устанавливаемых на основании условия сопряжения пластин в пакет.

Алгоритм решения задачи

Рассмотрим κ-ю, $(\kappa+1)$-ю, $(\kappa-1)$-ю пластины (рис.2). и введем обозначения

$$U_\kappa^{(+1)} = U_\kappa;\ q_\kappa^{(+1)} = q_\kappa;\ \kappa = 1,2,.....,N. \quad (3)$$

Тогда в силу условий сопряжения

$$U_\kappa^{(-1)} = U_{\kappa-1}^{(+1)};\ q_\kappa^{(-1)} = -q_{\kappa-1}^{(+1)} \quad (4)$$

имеем

$$U_\kappa^{(-1)} = U_{\kappa-1};\ q_\kappa^{(-1)} = -q_{\kappa-1};\ \kappa = 2,3,.....,N. \quad (5)$$

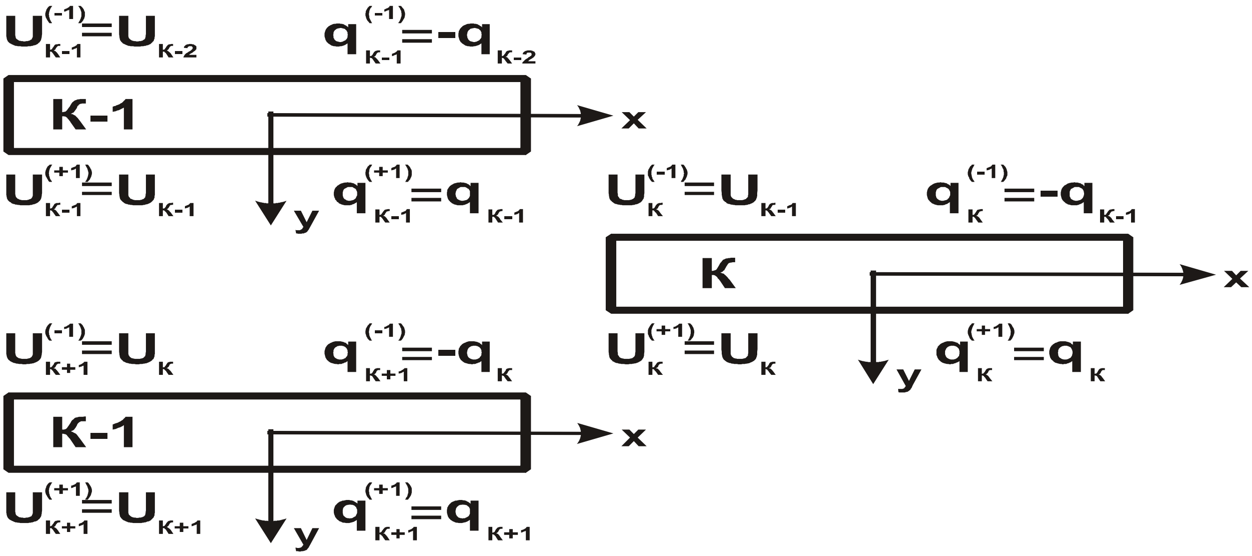

Рисунок 2

В этом случае, в интегральной постановке одномерных контактных задач, приведенных для цилиндрического изгиба, осесимметричного изгиба, кручения и антиплоской деформации в работах $[5-8]$, контактные соотношения для двух соседних пластин κ-ой и $(\kappa+1)$-ой на их общей границе приобретают вид:

- на нижней границе κ-ой пластины

$$-K_\kappa^{(+1,-1)} q_{\kappa-1} + K_\kappa^{(+1,+1)} q_\kappa + I_\kappa^{(+1)} \cdot Z_\kappa(x_0) = U_\kappa^{(+1)} = U_\kappa;\ \kappa = 1,2,.....,N-1; \quad (6)$$

- на верхней границе $\kappa+1$-ой пластины

$$-K_{\kappa+1}^{(-1,-1)} q_\kappa + K_{\kappa+1}^{(-1,+1)} q_{\kappa+1} + I_{\kappa+1}^{(-1)} \cdot Z_{\kappa+1}(x_0) = U_{\kappa+1}^{(-1)} = U_\kappa;\ \kappa = 1,2,.....,N. \quad (7)$$

Здесь

$K_{\kappa}^{(j,i)} q_{\kappa} \quad (i=1;-1)$ - интегральное выражение, содержащее под интегралом матрицу Коши системы уточненных уравнений пластин для контактных задач $[4]$ в произведении с матрицей коэффициентов этих уравнений и самого контактного взаимодействия;

$I_{\kappa}^{(j)}$ - матрица функций, входящих в произведение с матрицей значений переменных состояния на торце $Z_{\kappa}(x_0)$.

Исключая из соотношений (6), (7) перемещения U_{κ}, приходим к следующей зависимости между контактными взаимодействиями

$$K_{\kappa+1}^{(-1,+1)} q_{\kappa+1} + I_{\kappa+1}^{(-1)} \cdot Z_{\kappa+1}(x_0) =$$
$$= -K_{\kappa}^{(+1,-1)} q_{\kappa-1} + \left(K_{\kappa}^{(+1,+1)} + K_{\kappa+1}^{(-1,-1)}\right) q_{\kappa} + I_{\kappa}^{(+1)} \cdot Z_{\kappa}(x_0); \; \kappa = 1,2,.....,N-1. \qquad (8)$$

Подставляя выражения переменных состояния $Z_{\kappa}(x)$, полученные путем интегрирования системы уравнений пластины в краевые условия (2), получаем еще две зависимости между контактными взаимодействиями вида

$$\Gamma_{\kappa+1,(-1)} \cdot \left(-R_{\kappa+1}^{(-1)}\left(x^{(-1)}, s\right) q_{\kappa} + R_{\kappa+1}^{(+1)}\left(x^{(-1)}, s\right) q_{\kappa+1} + \Omega_{\kappa+1}\left(x^{(-1)}, x_0\right) \cdot Z_{\kappa+1}(x_0)\right) = O_{\kappa+1}^{(-1)}, \quad (9)$$

$$\Gamma_{\kappa+1,(-1)} \cdot \left(-R_{\kappa+1}^{(-1)}\left(x^{(+1)}, s\right) q_{\kappa} + R_{\kappa+1}^{(+1)}\left(x^{(+1)}, s\right) q_{\kappa+1} + \Omega_{\kappa+1}\left(x^{(+1)}, x_0\right) \cdot Z_{\kappa+1}(x_0)\right) = O_{\kappa+1}^{(+1)}, \quad (10)$$

где

$\Omega_{\kappa}(x, x_0)$ - матрица Коши системы уравнений κ-ой пластины;

$R_{\kappa}^{(i)} q_{\kappa} \quad (i=1;-1)$ - некоторое интегральное выражение, содержащее под интегралом матрицу Коши в произведении с матрицей коэффициентов

Добавляя к соотношениям (8) – (10) тождество $q_{\kappa} = q_{\kappa}$ перепишем эти выражения в матричном виде, в результате чего получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & M_{\kappa+1} \end{Vmatrix} \cdot t_{\kappa+1} = \begin{Vmatrix} 0 & \begin{Vmatrix} E & 0 \end{Vmatrix} \\ N_{\kappa} & N_{\kappa+1}^{\kappa} \end{Vmatrix} \cdot t_{\kappa} + O_{\kappa+1}; \; \kappa = 1,2,.....,N-1, \qquad (11)$$

где

$$t_{\kappa} = \begin{Vmatrix} q_{\kappa-1} \\ q_{\kappa} \\ Z_{\kappa}(x_0) \end{Vmatrix}; \; O_{\kappa+1} = \begin{Vmatrix} 0 \\ O_{\kappa+1}^{(+1)} \\ O_{\kappa+1}^{(-1)} \end{Vmatrix}; \; N_{\kappa} = \begin{Vmatrix} -K_{\kappa}^{(+1,-1)} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}; \; N_{\kappa+1}^{\kappa} = \begin{Vmatrix} K_{\kappa}^{(+1,+1)} + K_{\kappa+1}^{(-1,-1)} & I_{\kappa}^{(+1)} \\ \Gamma_{\kappa+1,(+1)} \cdot R_{\kappa+1}^{(-1)}(x^{(+1)}, s) & 0 \\ \Gamma_{\kappa+1,(-1)} \cdot R_{\kappa+1}^{(-1)}(x^{(-1)}, s) & 0 \end{Vmatrix};$$

$$M_{\kappa+1} = \begin{Vmatrix} K_{\kappa+1}^{(-1,+1)} & I_{\kappa+1}^{(-1)} \\ \Gamma_{\kappa+1,(+1)} \cdot R_{\kappa+1}^{(+1)}(x^{(+1)}, s) & \Gamma_{\kappa+1,(+1)} \cdot \Omega_{\kappa+1}(x^{(+1)}, x_0) \\ \Gamma_{\kappa+1,(-1)} \cdot R_{\kappa+1}^{(+1)}(x^{(-1)}, s) & \Gamma_{\kappa+1,(-1)} \cdot \Omega_{\kappa+1}(x^{(-1)}, x_0) \end{Vmatrix}; \qquad (12)$$

 ISSN 1562-9945

E - единичная матрица, размерность которой зависит от характера деформирования пакета: при цилиндрическом и осесимметричном изгибе это матрица второго порядка, при антиплоской деформации и кручении – скаляр.

Компоненты введенных матриц – столбцов $t_\kappa = t_\kappa(x)$ представляют собой контактные взаимодействия $q_{\kappa-1}$, q_κ, приложенные к κ-ой пластине и начальные значения ее переменных состояния $Z_\kappa(x_0)$. Эти величины полностью определяют деформированное состояние данной пластины

$$Z_\kappa(x) = \left\| -R_\kappa^{(-1)} \quad R_\kappa^{(+1)} \quad \Omega_\kappa(x,x_0) \right\| \cdot t_\kappa, \tag{13}$$

$$U_\kappa^{(-1)}(x) = \left\| -K_\kappa^{(-1,-1)} \quad K_\kappa^{(-1,+1)} \quad I_\kappa^{(-1)}(x,x_0) \right\| \cdot t_\kappa, \tag{14}$$

$$U_\kappa^{(+1)}(x) = \left\| -K_\kappa^{(+1,-1)} \quad K_\kappa^{(+1,+1)} \quad I_\kappa^{(+1)}(x,x_0) \right\| \cdot t_\kappa. \tag{15}$$

Поэтому, будем называть матрицу t_κ матрицей основных неизвестных k-ой пластины. Построенные соотношения (11) связывают основные неизвестные $t_{\kappa+1}$ и t_κ соседних пластин и представляют собой интегро – дифференциальные зависимости. Эти соотношения допускают разрешение относительно основных неизвестных $t_{\kappa+1}$. Однако, в общем случае выполнить это в замкнутом виде затруднительно. Поэтому заменим эти уравнения дискретным аналогом (производные – конечными разностями, интегралы – конечными суммами). При этом, компоненты матриц – столбцов t_κ будут представлять собой значения этих величин на множестве дискретных точек, определяемых выбором интерполяционных и квадратурных формул, а элементы матриц, а элементы матриц $M_{\kappa+1}$, N_κ, $N_{\kappa+1}^\kappa$ - коэффициенты указанных формул.

Разрешая теперь соотношения (11) относительно $t_{\kappa+1}$ приходим к следующим рекуррентным соотношениям

$$t_{\kappa+1} = L_{\kappa+1}^\kappa \cdot t_\kappa + \left\| \begin{matrix} 0 \\ M_{\kappa+1}^{-1} \cdot O_{\kappa+1} \end{matrix} \right\|, \ \kappa = 1,2,.....,N-1, \tag{16}$$

где

$$L_{\kappa+1}^\kappa = \left\| \begin{matrix} 0 & \left\| 1 \quad 0 \right\| \\ M_{\kappa+1}^{-1} \cdot N_\kappa & M_{\kappa+1}^{-1} \cdot N_{\kappa+1}^\kappa \end{matrix} \right\|. \tag{17}$$

Применяя последовательно полученное соотношение приходим к выражению основных неизвестных κ-ой пластины через основные неизвестные первой пластины

$$t_\kappa = L_\kappa^1 \cdot t_1 + \sum_{m=0}^{\kappa-2} L^{\kappa-m} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 \\ M_{\kappa-m}^{-1} \cdot O_{\kappa-m} \end{matrix} \right\|, \quad \kappa = 1,2,\ldots\ldots,N. \tag{18}$$

Подставляя в краевые условия на лицевых поверхностях пакета (1), выражения перемещений (14), (15) с учетом формул (18) получим

$$\Gamma_1^{(-1)} \cdot \left\| \begin{matrix} -K_1^{(-1,-1)} & K_1^{(-1,+1)} & I_1^{(-1)} \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot t_1 = Q_1^{(-1)}; \tag{19}$$

$$\Gamma_N^{(+1)} \cdot \left\| \begin{matrix} -K_N^{(+1,-1)} & K_N^{(+1,+1)} & I_N^{(+1)} \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot L_N^1 \cdot t_1 = Q_N^{(+1)} -$$

$$\Gamma_N^{(+1)} \cdot \left\| \begin{matrix} -K_N^{(+1,-1)} & K_N^{(+1,+1)} & I_N^{(+1)} \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left(\sum_{m=0}^{N-2} L_N^{N-m} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 \\ M_{N-m}^{-1} \cdot O_{N-m} \end{matrix} \right\| \right). \tag{20}$$

Для замыкания системы уравнений (19), (20) осталось добавить уравнения, соответствующие условию (2) для первой пластины. Подставим в условия (2), полагая $\kappa = 1$, выражение переменных состояния согласно формуле (13). В результате получим

$$\Gamma_{1,(+1)} \cdot \left\| -R_1^{(-1)}(x^{(+1)},s); \quad R_1^{(+1)}(x^{(+1)};s); \quad \Omega_1(x^{(+1)},x_0) \right\| \cdot t_1 = O_1^{(+1)}; \tag{21}$$

$$\Gamma_{1,(-1)} \cdot \left\| -R_1^{(-1)}(x^{(-1)},s); \quad R_1^{(+1)}(x^{(-1)};s); \quad \Omega_1(x^{(-1)},x_0) \right\| \cdot t_1 = O_1^{(-1)}. \tag{22}$$

Соотношения (19) – (22) образуют систему уравнений относительно основных неизвестных первой пластины

$$\left\| \begin{matrix} \Gamma_1^{(-1)} \cdot \left\| \begin{matrix} -K_1^{(-1,-1)} & K_1^{(-1,+1)} & I_1^{(-1)} \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \\ \Gamma_N^{(+1)} \cdot \left\| \begin{matrix} -K_N^{(+1,-1)} & K_N^{(+1,+1)} & I_N^{(+1)} \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot L_N^1 \\ \Gamma_{1,(+1)} \cdot \left\| -R_1^{(-1)}(x^{(+1)},s) \quad R_1^{(+1)}(x^{(+1)},s) \quad \Omega_1(x^{(+1)},x_0) \right\| \\ \Gamma_{1,(-1)} \cdot \left\| -R_1^{(-1)}(x^{(-1)},s) \quad R_1^{(+1)}(x^{(-1)},s) \quad \Omega_1(x^{(-1)},x_0) \right\| \end{matrix} \right\| \cdot t_1 =$$

$$= \left\| \begin{matrix} Q_1^{(-1)} \\ Q_N^{(+1)} - \Gamma_N^{(+1)} \cdot \left\| \begin{matrix} -K_N^{(+1,-1)} & K_N^{(+1,+1)} & I_N^{(+1)} \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left(\sum_{m=0}^{N-2} L_N^{N-m} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 \\ M_{N-m}^{-1} \cdot O_{N-m} \end{matrix} \right\| \right) \\ O_1^{(+1)} \\ O_1^{(-1)} \end{matrix} \right\|. \tag{23}$$

Обращая эту систему, находим t_1, а затем по формуле (16) определяются основные неизвестные для остальных пластин пакета.

Следует отметить, что размерность матрицы системы (23) зависит от количества точек, на которые разбита область изменения контактных взаимодействий.

 ISSN 1562-9945

Иллюстрация на примере антиплоской деформации

В качестве примера рассмотрим сдвиг двухслойного пакета пластин со свободными торцами равномерно – распределенной нагрузкой q, приложенной $2d$ (рис.3).

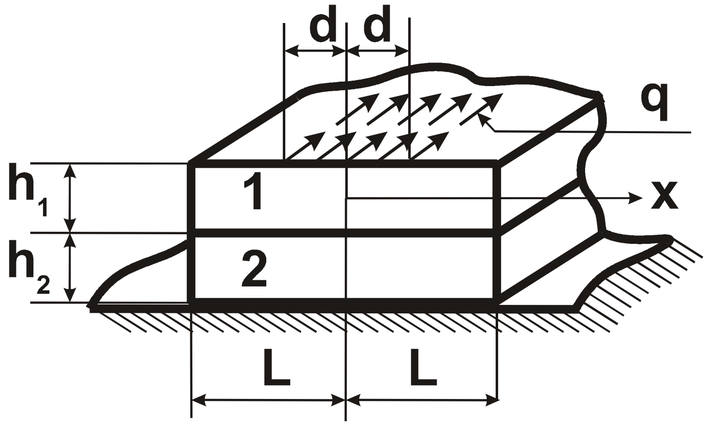

Рисунок 3

Пакет лежит на жестком основании. В этом случае имеем следующие исходные данные.

В условиях (1) на лицевых поверхностях:

$\Gamma_1^{(-1)} = \|0 \quad 1\|$; $\Gamma_2^{(+1)} = \|1 \quad 0\|$; $U_1^{(-1)} = u_1^{(-1)}$ - касательные перемещения точек верхней лицевой поверхности пакета; $U_2^{(+1)} = u_2^{(+1)}$ - касательные перемещения точек нижней лицевой поверхности пакета; $Q_1^{(-1)} = q \cdot H(d-x)$; $Q_2^{(+1)} = 0$; $H(x)$ - функция Хевисайда.

И условиях (2) на торцах:

$$\Gamma_{1,(-1)} = \Gamma_{1,(+1)} = \Gamma_{2,(-1)} = \Gamma_{2,(+1)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \; O_1^{(-1)} = O_1^{(+1)} = O_2^{(-1)} = O_2^{(+1)} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix};$$

$Z_\kappa = \|V_\kappa \quad \gamma_\kappa \quad T_\kappa \quad M_\kappa\|$; V_κ, γ_κ - обобщенные перемещения; T_κ, M_κ - касательные усилия и крутящие моменты.

Матрица Коши Ω_κ системы уравнений антиплоской деформации пластины имеет вид

$$\Omega_\kappa = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dfrac{x}{G_\kappa h_\kappa} & 0 \\ 0 & ch\left(\dfrac{\omega x}{h_\kappa}\right) & 0 & \dfrac{\omega b}{G_\kappa h_\kappa^2} sh\left(\dfrac{\omega x}{h_\kappa}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{G_\kappa}{\omega b} h_\kappa^2 sh\left(\dfrac{x}{h_\kappa}\right) & 0 & ch\left(\dfrac{\omega x}{h_\kappa}\right) \end{Vmatrix}; \; \omega = \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$a = 14{,}1$; $b = 1{,}4$ - коэффициенты уточненной теории пластин [4], соответствующие разрывной нагрузке на лицевых поверхностях пластины.

Система соотношений (23) - интегральные уравнения Вольтера второго рода и интегральные уравнения Фредгольма первого рода относительно неизвестных контактных взаимодействий и неизвестных значений переменных состояния на торцах пластин. Решение этой системы проводилось методом механических квадратур. Было принято $L = 5h_1$; $d = 2h_1$; $h_1 = h_2$; $G_1 = G_2$. Графики распределения относительных контактных взаимодействий между первой и второй пластинами $\frac{q_1}{q}$ и между второй пластиной и второй опорой $\frac{q_2}{q}$ приведены на рисунках 4 и 5 соответственно.

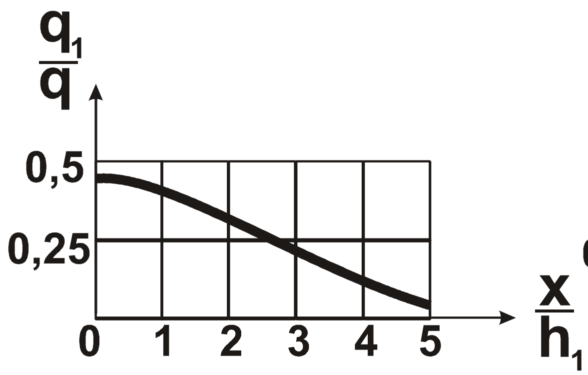

Рисунок 4

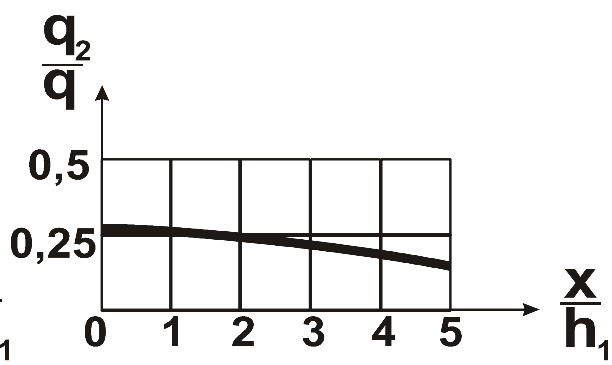

Рисунок 5

Вывод

Иллюстрация на примере антиплоской деформации показывает, что такой подход дает возможность даже при разрывной нагрузке на лицевой поверхности пакета, получить между пластинами, а также между пакетом и основанием распределение контактного взаимодействия достаточно гладкое, близкое к реальности. Предлагаемый подход позволяет решать контактные задачи для многослойного пакета пластин, работающие также в условиях цилиндрического изгиба, осесимметричного изгиба, кручения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями / Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. – Киев: наук. Думка, 1988.

2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., !987. – 360 с.
3. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.:Машиностроение, 1980.
4. Наумова И.Ю. Построение уравнений обобщенной теории пластин, применяемых в контактных задачах. Днепропетровск, 1990. 82с. Деп. В УкрНИИНТИ 07.03.90, №05-Ук90.
5. Наумова И.Ю. Системный подход к решению одномерных контактных задач пластин // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 1(24). – Дніпропетровськ. 2003. – С. 115-127.
6. Наумов Ю.А., Наумова И.Ю. К определению контактного взаимодействия пластин по лицевым поверхностям при их относительном скручивании // Вопросы прочности и пластичности. Сборник научных трудов. Дніпропетровськ. 1996. – С. 83-92.
7. Наумова И.Ю. К решению контактных задач цилиндрического изгиба пластин // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Том 5. Дніпропетровськ. 1999. С. 139-150.
8. Колесник И.А., Наумова И.Ю. К решению контактних задач антиплоской деформации пластин // Математические методы и компьютерное моделирование в исследовании и проектировании механических систем. Сборник научных трудов. Киев. 1995.- С. 45-51.

Получено 29.06.2006 г.