УДК 535.41

В.Ф. Рожковский, Н.А. Бузская

СОГЛАСОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСШИФРОВКЕ ИНТЕРФЕРОГРАММ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение

Интерферограмма образуется при когерентном сложении голограмм объекта при двух его положениях в пространстве. Она представляет собой фотографию объекта, промодулированную интерференционными полосами. Освещенность точки на фотографии зависит от соотношения между фазами двух пришедших световых волн и определяется по формуле

$$I(x, y)=I_0(x, y)(1+\cos(2\pi\varphi(x,y))),$$

где x, y – координаты точки на интерферограмме; I(x, y) – результирующая освещенность; I0(x, y) – исходная освещенность точки поверхности объекта, определяющая его фотографическое изображение; φ(x,y) – изменение фазы, вызванное перемещением точки. Целью расшифровки интерферограмм является определение изменения фазы φ(x,y), по которому можно затем вычислить перемещения и зависящие от них величины – деформации и напряжения. Одна из трудностей создания алгоритма расшифровки связана с тем, что функция, обратная к косинусу, является многозначной [1,2].

На основе метода конечных элементов может быть построен достаточно эффективный трехэтапный алгоритм расшифровки интерферограмм. Решается задача минимизации функционала

$$J(\varphi) = \iint_{\Omega}\left(I(x,y) - I_0(x,y)\left(1 + \cos 2\pi\varphi(x,y)\right)\right)^2 d\Omega\,, \tag{1}$$

где W - область интерферограммы. Интерферограмма покрывается сетью из конечных элементов. На первом этапе, называемом этапом первичного распознавания, решается задача минимизации функционала (1) на каждом элементе независимо от других. После первого этапа в узлах каждого элемента определяются значения фаз с точностью до знака и целой аддитивной добавки. На втором этапе, называемом этапом согласования, для каждого элемента вычисляются оптимальные значения знака и аддитивной

 ISSN 1562-9945

добавки. На третьем этапе полученные узловые значения фаз уточняются, причем каждый узел рассматривается в составе ансамбля элементов. В статье рассматривается второй этап алгоритма и предлагается способ решения задачи согласования.

Постановка задачи

На этапе начального распознавания фазы в элементе определяются с точностью до знака β_i и целой добавки α_i, где i – номер элемента. Задача этапа согласования – определить их. При этом фазы для всей интерферограммы могут быть также определены с точностью до знака и целой добавки. Поэтому, можно считать, что на одном из элементов знак и добавка известны и для определенности равны единице и нулю соответственно.

Если область интерферограммы покрыта сеткой из четырехугольников, то внутренние узлы сетки являются общими точками для соседних элементов. Такие узлы дают уравнения связи параметров β_i и α_i для соседних элементов. Поскольку β_i и α_i – целые числа, каждое такое уравнение может служить для одновременного определения неизвестных параметров β_i и α_i относительно известных. Поэтому, имеющегося количества уравнений более чем достаточно для определения неизвестных. Они образуют переопределенную систему в общем случае несовместных уравнений. Задача состоит в том, чтобы из всего множества уравнений взять действительно необходимые и отбросить недостоверные.

Метод решения

Для решения поставленной задачи предлагается использовать методы теории вероятности.

Предположим, имеется два элемента, которые имеют общую границу. На границе имеется конечное множество общих точек двух типов. В точках первого типа заданы величины типа фаз, которые нужно согласовывать по знаку и целой добавке. В точках второго типа заданы величины типа производных от фаз, которые нужно согласовывать только по знаку. Всего N точек первого типа и M второго. В каждой точке с номером i (i пробегает значения от 1 до N) первого типа со стороны первого элемента имеется n_i оценок $\varphi_{i,j}$ одной и той же величины, где j пробегает значения от 1 до n_i. В тех же точках со стороны второго элемента имеется k_i оценок $\psi_{i,j}$ той же величины, где j пробегает значения от 1 до ki. В каждой точке с номером i (i пробегает значения от 1 до M) второго типа со стороны первого элемента имеется одна оценка σi некоторой величины и оценка τi той же величины имеется со стороны второго элемента. Необходимо найти несколько наиболее надежных оценок для знака β и целой добавки α, которые следует применить к параметрам второго элемента, чтобы приблизится к параметрам первого, и оценить их надежность.

Вначале рассмотрим самый простой вариант такой задачи. Пусть имеются всего два числа, φ_1 и φ_2, которые являются оценками одной и той же величины со стороны элемента 1 и элемента 2 соответственно. Необходимо найти целое α и знак β такие, что

$$\Delta = \left|\beta\varphi_2 + \alpha - \varphi_1\right| \to \min. \tag{3}$$

Решением этой задачи являются следующие значения α и β, названные α_0 и β_0:

$$\beta_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } \left|\varphi_1 - \varphi_2 - \mathrm{round}(\varphi_1 - \varphi_2)\right| \le \left|\varphi_1 + \varphi_2 - \mathrm{round}(\varphi_1 + \varphi_2)\right|; \\ -1, & \text{если } \left|\varphi_1 - \varphi_2 - \mathrm{round}(\varphi_1 - \varphi_2)\right| > \left|\varphi_1 + \varphi_2 - \mathrm{round}(\varphi_1 + \varphi_2)\right|; \end{cases} \tag{4}$$
$$\alpha_0 = \mathrm{round}(\varphi_1 - \beta_0\varphi_2),$$

где round( ) – функция округления к ближайшему целому.

Кроме α_0 и β_0, имеет смысл рассмотреть еще несколько значений α и β:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\beta_0; \quad \alpha_1 = \mathrm{round}(\varphi_1 - \beta_1\varphi_2); \\ \beta_2 &= -\beta_0; \quad \alpha_2 = \mathrm{roundb}(\varphi_1 - \beta_2\varphi_2); \\ \beta_3 &= \beta_0; \quad \alpha_3 = \mathrm{roundb}(\varphi_1 - \beta_3\varphi_2), \end{aligned} \tag{5}$$

где roundb( ) – функция округления к целому, второму по близости.

В наиболее неблагоприятном случае, когда одно из φ_1 и φ_2 целое, а другое полуцелое, все четыре рассмотренных варианта α и β дают одно и тоже значение минимизируемой функции Δ (формула (3)), равное 0,5, поэтому они равноправны. Неблагоприятными для согласования являются также случаи, когда одно из φ_1 и φ_2 целое или полуцелое. В этом случае существует два равнозначных варианта выбора оптимальных значений для α и β. Например, если φ_1 =5,1, а φ_2 =6,0, то такими вариантами являются α = -1, β=1 и α = 11, β= -1. Оба они дают погрешность Δ, равную 0,1. Наиболее благоприятным случаем для согласования является случай, когда оба значения φ_1 и φ_2 отличаются от целого на величину 0,25. В этом случае имеется единственное оптимальное решение, вычисляемое по формуле (4). Его погрешность Δ равна 0, причем погрешность других решений равна или превосходит 0,5.

Оценим надежность выбора конкретных значений α и β, то есть вероятность правильного решения. Если заданы конкретные значения α и β, то надежность, очевидно, тем ниже, чем больше погрешность D. Если бы α и β были выбраны правильно и значения φ_1 и φ_2 были оценены точно, то погрешность D, равнялась бы нулю. На самом деле оценка значений φ_1 и φ_2 имеет определенную погрешность. Предположим, эта погрешность имеет нормальный закон распределения, который описывается формулой

$$W(x,a,D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2D}\right],$$

где a – математическое ожидание и D – дисперсия случайной величины x.

Тогда оценка надежности согласования при заданных значениях α и β будет пропорциональна величине

$$\rho = W(\varphi_1, a, D) W(\beta\varphi_2 + \alpha, a, D). \quad (6)$$

В формуле (6) оценку математического ожидания а следует произвести в виде

$$a = 0{,}5(\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \alpha).$$

Оценивать дисперсию D необходимо по совокупности всех случайных величин φ.

Для данных φ_1 и φ_2 будем рассматривать совокупность только четырех вариантов задания α и β, описываемую формулами (4)-(5). Поскольку вероятность правильного решения для остальных вариантов достаточно мала, будем считать ее равной нулю. Тогда по формуле (6) вычислим коэффициенты пропорциональности $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ для всех четырех вариантов и будем считать, что один из четырех вариантов обязательно имеет место, то есть сумма четырех вероятностей правильного решения равна единице. Поэтому, надежность каждого из вариантов можно оценить по формуле

$$p_i = \rho_i \Big/ \sum_{k=0}^{3} \rho_k, \quad i = 0,1,2,3.$$

Описанный подход может быть применим для решения общей задачи, поставленной вначале данного пункта. Вначале определяем возможные варианты задания параметров α и β. С этой целью для каждого значения $\varphi_{i,j}$ первого элемента и всех соответствующих ему значений $\psi_{i,,k}$ второго элемента определяется множество из четырех значений параметров α и β, которые задаются формулами (4)-(5). Множество вариантов задания параметров α и β для всей системы W определяется как теоретикомножественное объединение всех таких множеств. Для каждого варианта s из Ω задания параметров α и β можно вычислить пропорциональную величину ρ_s по формуле

$$\rho_s = \prod_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=1}^{n_i} W(\varphi_{i,j}, a_i, D) \prod_{j=1}^{k_i} W(\beta_s \psi_{i,j} + \alpha_s, a_i, D) \right) \prod_{i=1}^{M} P(\sigma_i, \tau_i), \qquad (7)$$

где P(σ_i, τ_i) – надежность согласования величин σ_i и τ_i, в которой оценку математического ожидания ai следует произвести по формуле

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \varphi_{i,j} + \sum_{j=1}^{k_i} \left(\beta_s \psi_{i,j} + \alpha_s \right)}{n_i + k_i}.$$

Формула для надежности каждого варианта выглядит так:

$$p_s = \frac{\rho_s}{\sum_{\Omega} \rho_s}, \text{ для всех s из } \Omega.$$

Оценку дисперсии D, входящей в формулу (7), можно провести следующим образом. Рассмотрим исходное, несогласованное состояние совокупности конечных элементов. В каждом узле конечноэлементного разбиения известны до четырех оценок фаз со стороны примыкающих элементов, которые обозначим $\varphi_{i,j}$, где i – номер узла, принимающий значения от 1 до N, j – номер оценки, принимающий значения от единицы до n_i. Проведем согласование в каждом узле независимо от остальных узлов, то есть будем считать, что остальных узлов как бы не существует. Будем считать, что неизменной остается оценка $\varphi_{i,1}$, а остальные оценки изменяются по формулам $\beta_j \varphi_{i,j} + \alpha_j$ с тем, чтобы как можно ближе приблизиться к $\varphi_{i,1}$. Такой же результат можно получить, если все оценки подвергнуть преобразованию

 ISSN 1562-9945

$$\varphi^*_{i,j} = \left|\varphi_{i,j} - \mathrm{round}\left(\varphi_{i,j}\right)\right|,$$

где $\varphi^*_{i,j}$ – новое значение фазы;

round( ) – функция округления к ближайшему целому.

Общую дисперсию D оценить по формуле

$$D = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varphi^*_{i,j}\right)^2}{n_i} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{n_i}\varphi^*_{i,j}}{n_i}\right)^2\right]. \qquad (8)$$

Очевидно, что оценка (8) является заниженной оценкой дисперсии. Ее необходимо увеличить в несколько раз. Коэффициент увеличения подбирается экспериментально.

Способ оценки надежности $P(\sigma_i, \tau_i)$ согласования величин σ_i и τ_i зависит от физической сущности величины, оценкой которой являются величины σ_i и τ_i. Рассмотрим в качестве такой величины производную от фазы по направлению нормали к границе элемента. Ситуация, когда производная от фазы меняет знак при переходе через границу элементов, является маловероятной и в случае возможной неоднозначности ей следует предпочесть противоположную ситуацию, когда производная не меняет знака. Такое требование усиливается при увеличении величины производной со стороны одного или другого соприкасающихся элементов. Это связано с тем, что изменение знака первой производной от фазы свидетельствует о большой величине второй производной в данном месте. Вторая производная от фазы связана с искривлением поверхности объекта в данном месте, которое требует наличия определенных нагрузок на объект.

Обозначим p_0 априорную вероятность того, что производная от фазы не меняет знак при переходе через границу элементов, p_1 – вероятность того, что производная от фазы со стороны первого элемента отрицательна, и p_2 – вероятность того, что производная от фазы со стороны второго элемента отрицательна. Величину p_0 можно для начала принять равной единице, а потом уточнить, проведя достаточное количество расшифровок. Величины p_1 и p_2 можно определить так:

$$p_1 = F(0, \sigma_i, D);$$
$$p_2 = F(0, \tau_i, D),$$

где F(x, a, D) – функция распределения для нормального закона для случайной величины x с математическим ожиданием a и дисперсией D.

Тогда величину P(σi,τi) можно вычислить по формуле

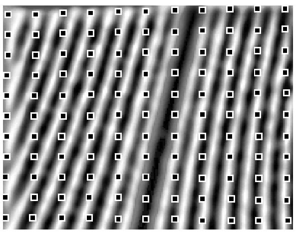
$$P(\sigma_i, \tau_i) = p_0 + p_1 + p_2 - 2(p_0 p_1 + p_0 p_2 + p_1 p_2) + 4 p_0 p_1 p_2$$

Согласование путем слияния рядом стоящих областей проводится следующим образом.

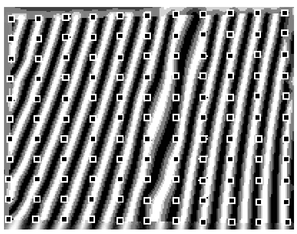
Назовем областью совокупность рядом стоящих элементов. Вначале каждая область состоит из одного элемента, и множество всех областей совпадает с множеством всех элементов. Установим все границы между областями и для каждой границы по алгоритму, определим надежность согласования. Определим границу с максимальной надежностью и объединим граничащие по ней области в одну. Получим новое множество областей, в котором устанавливаем границы, определяем надежности согласования и т. д. до тех пор, пока не образуется область, включающая в себя все элементы.

Преимущество описанного алгоритма в том, что процесс перед спорным участком интерферограммы как бы «разворачивается в цепь». Удлинение границы между областями, как правило, усиливает преимущество определенного выбора параметров согласования по отношению к другим выборам.

Численные эксперименты показали достаточную надежность рассмотренного метода согласования (рис. 1).



а)



б)

Рисунок 1 – Пример интерферограммы после согласования: а) исходная интерферограмма; б) интерферограмма после согласования

 ISSN 1562-9945

ЛИТЕРАТУРА

1. Рожковский В. Ф. Автоматизированная расшифровка голографических интерференционных портретов конструкций из композитных материалов. // Сб. Системные технологии. Автоматизация вспомогательных процессов в машиностроении – Д.,1997. Вып.1
2. О.О.Ларіонова. Голографічні технології в авіаційно-космічній техніці: Навч.посіб. / В. Ф. Рожковський, Ю. В. Сохач; під ред. В. П. Малайчука. - Д.:РВВ ДНУ, 2003. - 272 с.
3. Рожковский В. Ф., Бузская Н. А. Способы предварительного распознавания при расшифровке интерферограмм методом конечных элементов // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. – Выпуск 4 (39). – Д., 2005. - С. 3-12.

Получено 01.11.2006 г.