УДК 681.142

В.В. Грицик, М.А. Назаркевич

АЛГОРИТМ ТАБУЛЮВАННЯ ATEB-ФУНКЦІЙ

Вступ

В найрізноманітніших розділах механіки, фізики і техніки має місце розробка нових методів дослідження коливальних систем з нелінійним характером, які описуються теорією диференціальних рівнянь.

Одним з актуальних напрямків дослідження в теорії нелінійних диференціальних рівнянь є теорія Ateb-функцій. Розглядаємо коливну систему з нелінійним характером у якій шукані величини змінюються в часі по несинусоїдальному неперіодичному закону. В таких випадках для дослідження процесів, що протікають у коливальній системі здійснюють розклад таких функцій.

Нехай коливальна система з одним ступенем вільності описується диференційним рівнянням у вигляді

$$\ddot{x} + c^2 \cdot x^\nu = \varepsilon \cdot F(x, \dot{x}, \varepsilon) \tag{1}$$

де ε малий додатній параметр, постійна $c^2 > 0$, показник степені

$$\nu = \frac{2\nu_1' + 1}{2\nu_1'' + 1}, \qquad (\nu_1', \nu_1'', \nu_2', \nu_2'' = 0, 1, 2, ...), \tag{2}$$

а $F(x, \dot{x}, \varepsilon)$ - неперервна функція відносно своїх змінних $x, \dot{x}$ і параметра ε. Причому

$$F(x, \dot{x}, \varepsilon) = F_1(x, \dot{x}) + \varepsilon \cdot F_2(x, \dot{x}) + \varepsilon^2 \cdot F(x, \dot{x}, \varepsilon) + ...$$

Рішення рівняння такого типу розглядались у роботах [1,2]. У даному випадку рівняння розв'язуємо з використанням аперіодичних Ateb-функцій.

Застосування математичного апарату Ateb-функцій для дослідження коливальних систем з нелінійним характером

Розв'язок рівняння (1) запишеться через *Ateb*-функції, які є оберненням неповних *Beta*-функцій, яка представляється у вигляді

 ISSN 1562-9945

$$B(p,l) = \int_0^{0<t<1} t^{p-1}(1-t)^{l-1}\,dt$$

якщо t=1, то неповна *Beta*–функція перетворюється в повну *Beta*-функцію [3]. Ця функція виникла як рішення задачі інтерполяції факторіальної функції.

Аперіодична Ateb-функція $v = sha(n,m,\omega)$ представляє собою обернення інтегралу

$$\frac{n+1}{2}\int_0^{0\le v\le\infty} \frac{d\bar{v}}{(1+\bar{v}^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} = \omega\,, \tag{3}$$

де ω- незалежна змінна $(-\infty \le \omega \le \infty)$, а m і n – параметри, які визначаються формулами (2) та

$$m = \frac{2v_2' + 1}{2v_2'' + 1}, \qquad (v_1', v_1'', v_2', v_2'' = 0, 1, 2, ...)\,. \tag{4}$$

Функція $sha(n,m,\omega)$ відносно ω - $2\prod'(m,n)$ - періодична, де $2\prod' = B(\frac{1}{n+1}, \frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1})$ - Beta-функція. Величина $\prod'(m,n)$ для всіх значень m і n, які визначаються формулами (2) та (4) скінченна і неперервна, за виключенням значень, що задовільняють нерівність

$$\frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1} \le 0 \tag{5}$$

при яких $\prod'(m,n)$ перетворюється в безмежність.

Цікавим залишається питання табулювання цих функцій. Виходячи з (3) розглянемо функцію

$$\Phi_1(w,v) = w - \frac{n+1}{2}\int_0^v \frac{d\bar{v}}{(1+\bar{v}^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} \tag{6}$$

де

$$w_0 = \frac{n+1}{2}\int_0^1 \frac{d\bar{v}}{(1+\bar{v}^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} \tag{7}$$

Підінтегральний вираз (6) розкладемо в степеневі ряди. Тоді функція $\Phi_1(w,v)$ матиме вигляд:

$$\Phi_1(w,v) = w - \frac{b}{2}v\left[1 - \frac{a}{1!(b+1)}v^b + \frac{a(a+1)}{2!(2b+1)}v^{2b} + \ldots + (-1)^k \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{k!(kb+1)}v^{kb} + \ldots\right], \quad (8)$$

де

$$a = \frac{m}{m+1}, \quad b = n+1, \quad c = m+1, \quad d = \frac{n}{n+1},$$

$$\bar{w} = w_0 + \frac{c}{2^{\frac{c(d+1)-1}{c}}}\left[\frac{1}{cd-1} + \frac{d}{1!2\left[c(d+1)-1\right]} + \ldots + \frac{d(d+1)}{2!2^2\left[c(d+2)-1\right]} + \ldots + \frac{d(d+1)\ldots(d+k-1)}{k!2^k\left[c(d+k)-1\right]} + \ldots\right] \quad (9)$$

Розклади в ряди (8) справедливі для всіх m і n, що мають вигляд (4) припускаючи, що (5) є нерівність. Ліва частина (5) не може бути цілим числом. Звідси випливає в розкладах (8) інших нулів в знаменнику немає.

Ряд (8) збігається рівномірно в інтервалах $0 \le v \le 1$ [2].

Тепер для кожного фіксованого значення w із інтервалу $0 \le w \le \omega_0$ шукаємо нулі функції $\Phi_1(w,v)$, тобто визначаємо $v = sha(n,m,w)$.

Алгоритм табулювання аперіодичної Ateb-функції $v = sha(n,m,\omega)$

На початку оголошуємо змінні та присвоюємо значення константам. Задаємо точність для обчислення повної Beta-функції. Оголошуємо змінні циклів. Наступним кроком в алгоритмі є модуль створення текстового файлу і запису числових даних, обчислених у програмному пакеті. Обраховуємо сталі значення для $v = sha(n,m,\omega)$, до них відноситься інтеграл повної Beta-функції, величини a, b, c, d згідно формули (9) та ряд w, який визначається з (8) для повної Beta-функції. Обчислення проводиться з точністю $\varepsilon = 10^{-15}$. Наступний етап - основний розрахунок. Його блок-схема показана на рис. 1. У ньому F1 (w, v) обчислення ряду (9), y_{tosh} - задання точності обчислень, y_{step} - задання кроку пошуку неявно заданої функції, w3, F1 - шукані корені.

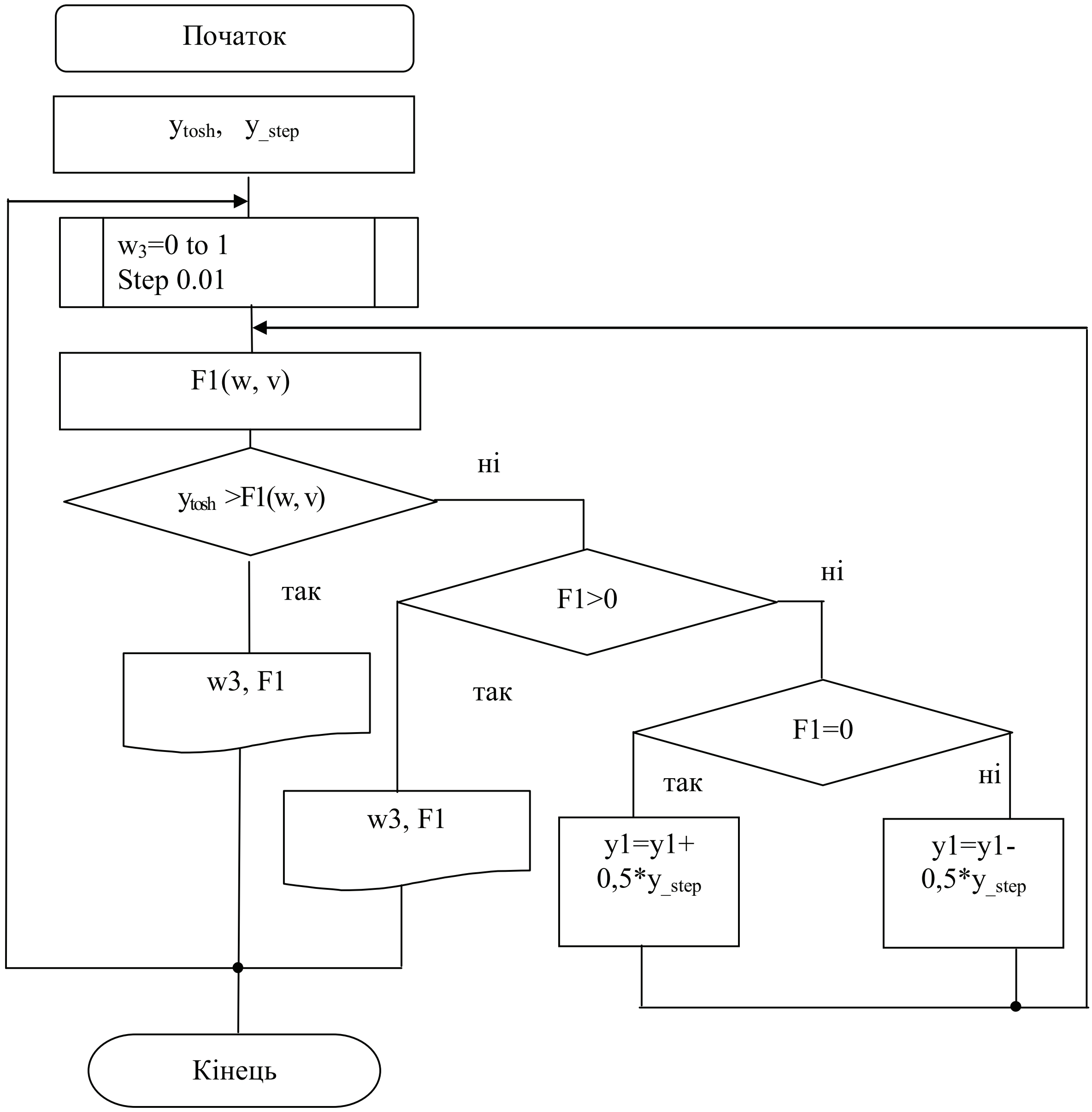

Рисунок 1 – Блок-схема алгоритму основного розрахунку табулювання аперіодичної Ateb-функції

Результати табулювання

Результати табулювання функції $v = sha(n, m, \omega)$ приведені в таблиці 1, а нижче побудовані їх графіки (рис.2).

Таблиця 1

Результати табулювання аперіодичної Ateb-функції $v = sha(n, m, \omega)$.

w	n=0.166 m=1	n=0,2 m=1	n=0,6 m=1	n=0,833 m=1
0,01	1,72E-02	1,67E-02	1,25E-02	1,09E-02
0,02	3,44E-02	3,35E-02	2,50E-02	2,18E-02
0,03	5,18E-02	0,0503125	3,75E-02	3,27E-02
0,04	6,93E-02	6,73E-02	5,01E-02	4,37E-02
0,05	8,68E-02	0,0842945	6,26E-02	5,46E-02

w	n=0.166 m=1	n=0,2 m=1	n=0,6 m=1	n=0,833 m=1
0,06	0,10453	0,1014355	7,52E-02	6,55E-02
0,07	0,122337	0,118682	8,78E-02	7,65E-02
0,08	0,140264	0,1360375	0,1004835	8,74E-02
0,09	0,158314	0,1535045	0,113157	9,84E-02
0,1	0,176491	0,171086	0,1258645	0,109423
0,11	0,194797	0,188785	0,1386075	0,120435
0,12	0,213232	0,206603	0,151389	0,1314655
0,13	0,231801	0,224543	0,1642105	0,1425165
0,14	0,250504	0,2426065	0,1770745	0,1535885
0,15	0,269343	0,2607955	0,1899825	0,164684
0,16	0,28832	0,279112	0,202937	0,1758035
0,17	0,307436	0,297558	0,215939	0,1869485
0,18	0,326694	0,316135	0,2289915	0,1981205
0,19	0,346095	0,3348445	0,242095	0,209321
0,2	0,365641	0,353689	0,2552525	0,220551
0,21	0,385333	0,3726695	0,2684645	0,2318115
0,22	0,405172	0,391788	0,2817335	0,243105
0,23	0,425162	0,411046	0,295061	0,2544315
0,24	0,445304	0,430446	0,3084485	0,2657935
0,25	0,4656	0,44999	0,321898	0,277191
0,26	0,486053	0,46968	0,3354105	0,2886265
0,27	0,506666	0,489518	0,348988	0,3001005
0,28	0,527442	0,5095075	0,362632	0,3116145
0,29	0,548384	0,529652	0,3763445	0,32317
0,3	0,569499	0,549954	0,390126	0,3347675
0,31	0,59079	0,5704185	0,403979	0,3464095
0,32	0,612265	0,59105	0,417905	0,358096
0,33	0,633931	0,611855	0,431905	0,3698295
0,34	0,655798	0,63284	0,4459805	0,38161
0,35	0,677875	0,654013	0,4601335	0,39344
0,36	0,700177	0,675384	0,474366	0,4053195
0,37	0,72272	0,696965	0,4886785	0,417251
0,38	0,745522	0,71877	0,5030735	0,429235
0,39	0,768608	0,7408155	0,5175525	0,441273
0,4	0,792004	0,7631225	0,5321165	0,453366
0,41	0,815748	0,785716	0,5467685	0,465516
0,42	0,83988	0,808626	0,56151	0,4777235
0,43	0,864456	0,8318905	0,5763425	0,4899905
0,44	0,889541	0,8555555	0,5912685	0,502318
0,45	0,915224	0,879679	0,6062905	0,514707
0,46	0,941615	0,9043345	0,621411	0,5271595
0,47	0,968865	0,9296165	0,6366325	0,539676
0,48	0,997177	0,95565	0,6519585	0,552259
0,49	1,026843	0,9826025	0,6673925	0,5649095
0,5	1,058303	1,0107085	0,6829385	0,5776285
0,51	1,092267	1,0403105	0,6986005	0,5904185
0,52	1,130035	1,071941	0,714385	0,6032805
0,53	1,174503	1,1065095	0,730297	0,6162165
0,54	1,236163	1,1458175	0,746344	0,6292285
0,55		1,1946395	0,7625345	0,642318
0,56			0,778878	0,6554875
0,57			0,7953865	0,668739
0,58			0,8120745	0,682076

 ISSN 1562-9945

w	n=0.166 m=1	n=0,2 m=1	n=0,6 m=1	n=0,833 m=1
0,59			0,8289575	0,6955005
0,6			0,846057	0,7090155
0,61			0,8633975	0,7226255
0,62			0,881009	0,736334
0,63			0,89893	0,750146
0,64			0,9172075	0,7640665
0,65			0,935903	0,778102
0,66			0,955096	0,7922605
0,67			0,9748915	0,8065495
0,68			0,9954355	0,8209805
0,69			1,0169365	0,8355645
0,7			1,0397085	0,850317
0,71			1,0642655	0,8652555
0,72			1,0915535	0,880401
0,73			1,1237195	0,8957805
0,74			1,168963	0,9114265
0,75				0,9273805
0,76				0,9436955
0,77				0,96044
0,78				0,977706
0,79				0,99562
0,8				1,014364
0,81				1,034213
0,82				1,055618
0,83				1,0794145
0,84				1,1075205
0,85				1,147546

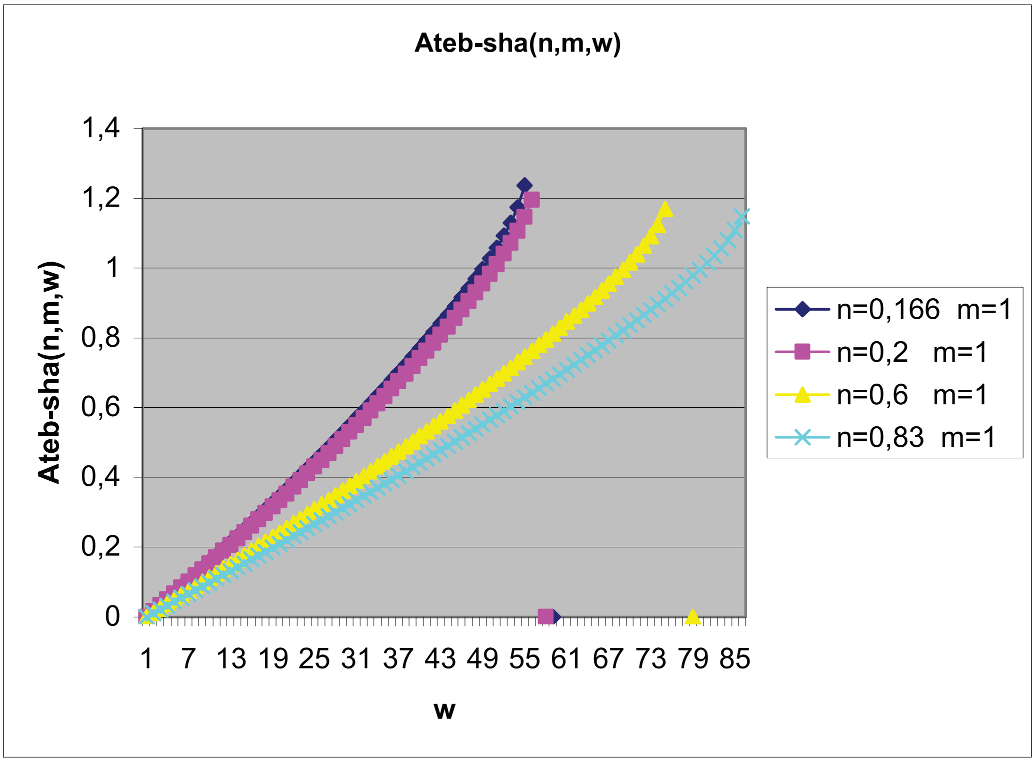

Рисунок 2 – Графіки табулювання функції $v = sha(n, m, \omega)$ за допомогою розробленого алгоритму

Висновки

Показано, що періодичні Ateb-функції, їх математичні властивості і числові значення дають можливість вирішувати нелінійні диференційні рівняння, які описують коливальні процеси для автономних і неавтономних систем рівнянь. Гіперболічні (аперіодичні) Ateb-функції використовуються при побудові рішень неколивних процесів [9].

Для моделювання складних коливних процесів з істотною нелінійністю пропонується використовувати математичний апарат Ateb-функцій, який дозволяє описати дані процеси з підвищеною точністю без апроксимацій чи будь-яких наближень[2]. Крім того, математичний апарат Ateb-функцій є функціонально повним, зручним для опису, і легко адаптованим до зміни параметрів і процесів. Такий математичний апарат дозволяє проводити моделювання періодичних і неперіодичних процесів та враховувати характеристики матеріалу у динамічних системах. Він забезпечує отримання точного розв'язку в автономних нелінійних системах диференційних рівнянь другого порядку. Апарат Ateb-функцій є ефектиним при дослідженні динаміки росту і затухання випадкових вібрацій у нелінійних системах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. Возний А.М. Застосування Ateb-функцій для побудови розв'язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь. – Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970, № 9, с. 971-974.
3. Сеник П. М. Обращение неполной Beta – функции. – Укр. мат. журн. 1969, т. 21, № 3, с. 325-333.
4. Грицик В.В., Назаркевич М.А. Дослідження періодичних Ateb – функцій у математичному моделюванні. Інтелектуальні системи прийняття рішень та прикладні аспекти інформаційних технологій, 18 – 21 травня 2005. Євпаторія. – С.142 - 145.
5. M.Nazarkevich Research of numeral transformations of Ateb-functions in the mathematical design //IV Sympozjum modelowanie i symulacja komputerowa w technice. Wyzsza szkola informatyki.- Lodz 2005. – С. 161 – 163.

 ISSN 1562-9945