

Н.А. Козуб, А.Н. Хомченко, В.Г. Шерстюк

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БИКУБИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### Постановка проблемы

Бикубическими поверхностями называют функции формы (базисные, координатные функции) конечного элемента (КЭ) сирендипова семейства с 12 узлами на границе [1,2]. Сирендиповы КЭ возникли как результат настойчивых попыток исключить внутренние узлы в дву – и трехмерных КЭ лагранжева семейства. Основная проблема сирендиповых КЭ высших порядков, плохо поддающихся какой-либо формализации, связана с построением базиса. Существует, уже ставшее привычным, мнение [1], что для успешного построения базисов сирендиповых КЭ высших порядков требуется определенная изобретательность и умение подбирать неполные полиномы, удовлетворяющие интерполяционной гипотезе. Традиционный матричный метод построения базисов, широко распространенный в МКЭ, неэффективен для сирендиповых КЭ высших порядков. Проблемы сирендиповых аппроксимаций проще всего решаются с помощью геометрического моделирования и компьютерных экспериментов.

### Анализ предшествующих публикаций и постановка задачи

Первые результаты геометрического моделирования сирендиповых функций в сочетании с полезными вероятностными идеями были опубликованы в начале 80 – х годов прошлого столетия [3,4]. Это перспективное направление получило развитие в работах [5,6]. С помощью прямого конструирования, а также процедуры взвешенного усреднения удалось построить целое семейство альтернативных базисов на КЭ с 12 узлами. Наиболее интересные результаты исследований бикубических аппроксимаций были включены в кандидатские диссертации Камаевой Л.И., Литвиненко Е.И., Гучека П.И., Манойленко Е.С.

Основная цель статьи – дать подробное описание простой и наглядной процедуры геометрического моделирования бикубических поверхностей, подчеркнуть особую роль классических поверхностей

© Козуб Н.А., Хомченко А.Н., Шерстюк В.Г., 2006

второго порядка в сирендиповых композициях.

### Основная часть

Интерполяционный полином на сирендиповом КЭ с 12 узлами (рис. 1,2) имеет вид взвешенного среднего

$$U(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \cdot U_i \quad (1)$$

где  $N_i(\xi, \eta)$  - базис бикубической интерполяции;  $U_i$  - заданные значения функции в граничных узлах ( $i = \overline{1,12}$ ).

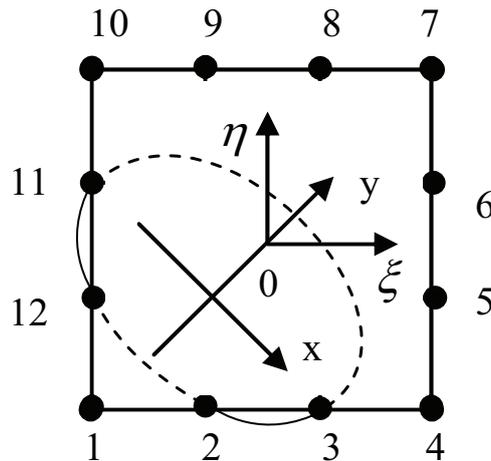


Рисунок 1 - К построению  $N_i(\xi, \eta)$  для модели с эллиптическим параболоидом

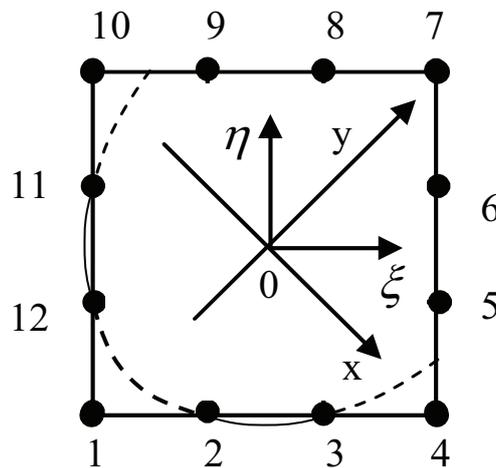


Рисунок 2 - К построению  $N_i(\xi, \eta)$  для модели с косым параболическим цилиндром

Базисные функции  $N_i(\xi, \eta)$  должны удовлетворять гипотезе типа Лагранжа

$$N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}, i = \overline{1,12}, k = \overline{1,12}, \quad (2)$$

где  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера, и условию сохранения весового баланса

$$\sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) = 1. \quad (3)$$

На каждой стороне КЭ расположено 4 узла, поэтому вдоль координатного направления функция меняется по закону кубической параболы (отсюда название – бикубическая интерполяция).

Разнообразие моделей бикубической интерполяции и их названия определяются угловыми функциями  $N_i(\xi, \eta)$ ,  $i=1,4,7,10$ . С помощью промежуточных функций ( $i=2,3,5,6,8,9,11,12$ ) удобно регулировать весовой баланс (3). Нам достаточно построить только две функции, например,  $N_1(\xi, \eta)$  и  $N_2(\xi, \eta)$ . Остальные можно получить параллельным переносом координат или перестановкой  $\xi$  и  $\eta$ . Здесь мы рассмотрим две модели бикубической интерполяции.

#### Модель с эллиптическим параболоидом

Начнем с функции

$$Z_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad (4)$$

которая обеспечивает нулевые аппликаты одновременно в узлах 4,5,6,7,8,9,10 (рис.3).

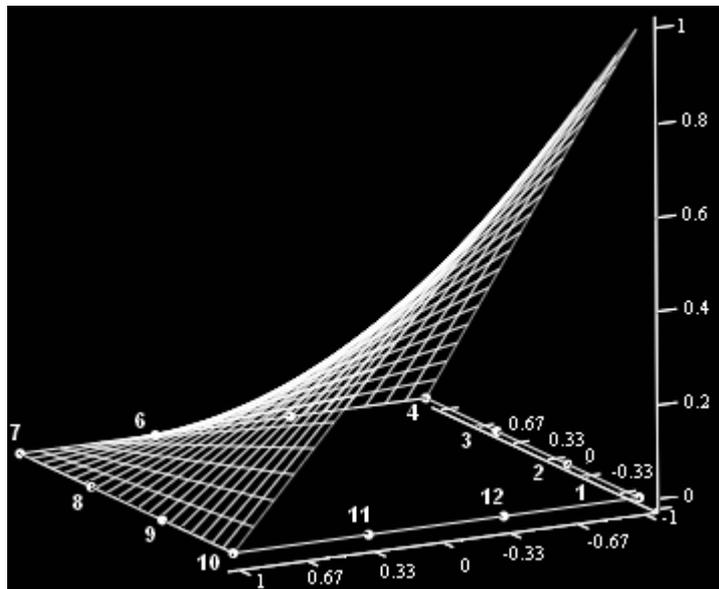


Рисунок 3 - Функция – “пагода”  $Z_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$

Это хорошо известная функция - “пагода”, реализующая билинейную интерполяцию на квадрате. Доказано [7,8], что эта

функция определяет вероятность перехода блуждающей частицы из случайного старта  $M(\xi, \eta)$  в вершину 1. При конструировании сирендиповых КЭ эта поверхность постоянного кручения (гипар) играет определяющую роль во всех, без исключения, семействах базисных функций. Нам остается подобрать поверхность второго порядка с единичной аппликатой в узле 1, которая проходит через узлы 2,3, 11,12. Для этой цели пригоден эллиптический параболоид. На рис.1. показана линия нулевого уровня – эллипс, проходящий через указанные узлы. Чтобы обеспечить геометрическую изотропию угловой базисной функции, эллиптический параболоид выбирается симметричным относительно плоскости  $\xi-\eta=0$  (рис.1). В качестве второй плоскости симметрии выбрана плоскость  $3 \xi+3\eta+2=0$ . В системе координат  $Oxy$  каноническое уравнение эллипса нулевого уровня имеет вид:

$$\frac{9x^2}{8} + \frac{27(y + \frac{\sqrt{2}}{3})^2}{8} = 1$$

После преобразований параллельного переноса и поворота координат на угол  $45^\circ$  получаем уравнение эллиптического параболоида. Вершина параболоида имеет координаты  $(-1/3; -1/3; -1/2)$ . Теперь угловая базисная функция конструируется в виде произведения:

$$N_1(\xi, \eta) = Z_1(\xi, \eta)W_1(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(9(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2 + \xi + \eta) - 1)$$

Как видим, угловая функция формы в этой модели является синтезом эллиптического параболоида и гипара (рис.4).

Вообще, для угловых узлов:

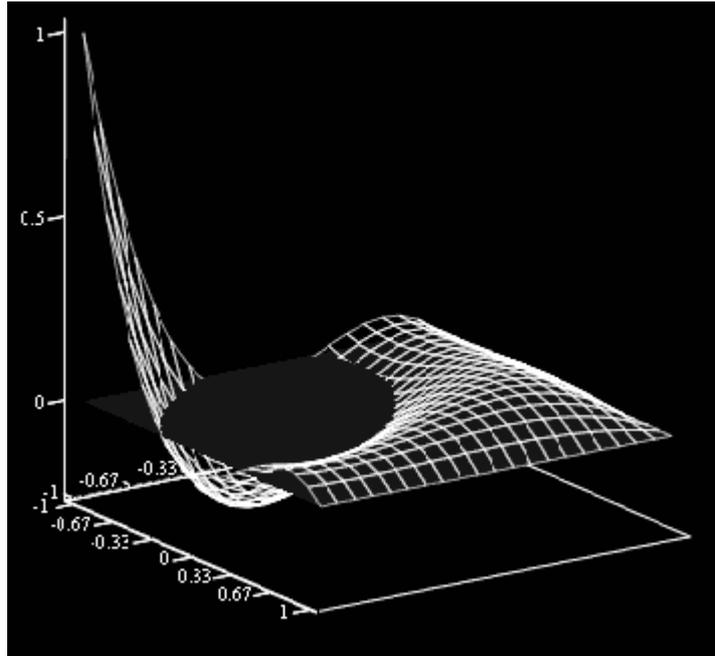
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(9(\xi^2 + \eta^2 + \xi_i \eta_i \xi \eta - \xi_i \xi - \eta_i \eta) - 1), \quad (5)$$

$$\xi_i, \eta_i = \pm 1, i = 1, 4, 7, 10.$$

Промежуточную функцию формы

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1-\eta)(-6\xi - \eta + 1)$$

можно разложить на гипар и две плоскости или на параболический цилиндр и две плоскости.

Рисунок 4 - Поверхность  $N_I(\xi, \eta)$ 

Вообще, для промежуточных узлов

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(18\xi_i \xi + \eta_i \eta + 1) \quad (6)$$

$$\xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1, i = 2, 3, 8, 9.$$

Для остальных узлов достаточно сделать перестановку  $\xi$  и  $\eta$ .

#### Модель с косым параболическим цилиндром

В этом случае для конструирования  $N_I(\xi, \eta)$  наряду с гипаром (4) используется косой параболический цилиндр, проходящий через узлы 2,3,11,12 и имеющий единичную аппликату в узле 1.

На рис.2. показана линия нулевого уровня параболического цилиндра, которая является направляющей цилиндрической поверхности. Все образующие цилиндрической поверхности параллельны вектору  $(-\frac{2}{9}\lambda; -\frac{2}{9}\lambda; \lambda)$ . Уравнение параболического цилиндра в координатах  $\xi, \eta$  имеет вид:

$$W_2(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(9(\xi - \eta)^2 - 18(\xi + \eta) - 28) \quad (7)$$

Эта поверхность симметрична относительно плоскости  $\xi - \eta = 0$ .

Таким образом, угловая функция формы имеет вид (рис.5)

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(9(\xi-\eta)^2 - 18(\xi+\eta) - 28)$$

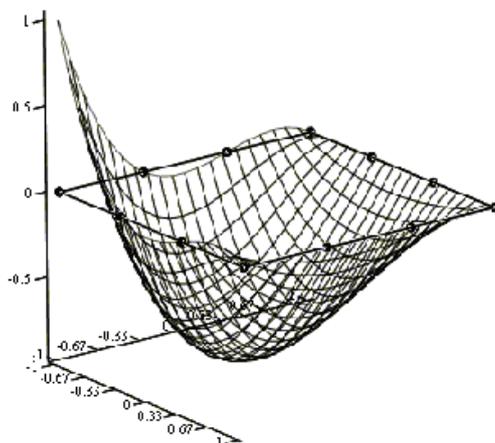


Рисунок 5 - Поверхность  $N_1(\xi, \eta)$ , (модель с косым параболическим цилиндром)

Вообще, для угловых узлов

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 18\xi_i\eta_i\xi\eta + 18\xi_i\xi + 18\eta_i\eta - 28) \quad (8)$$

$$\xi_i, \eta_i = \pm 1, i = 1, 4, 7, 10.$$

Для промежуточных узлов

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(9\xi_i\xi - \eta_i\eta + 2) \quad (9)$$

$$\xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1, i = 2, 3, 8, 9.$$

На рис.6. представлена  $N_2(\xi, \eta)$  для второй модели.

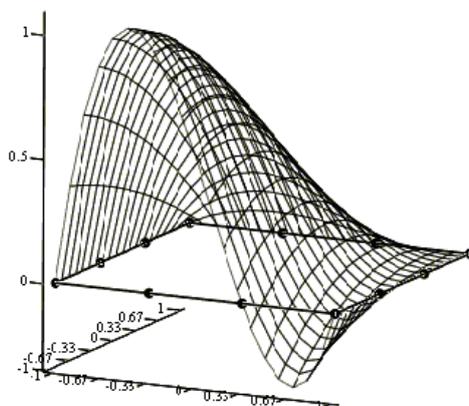


Рисунок 6 - Поверхность  $N_2(\xi, \eta)$ , (модель с косым параболическим цилиндром)

Как и в первом случае, эту поверхность можно разложить на параболический цилиндр и две плоскости или на гипар и две плоскости.

### Модель с параболоидом вращения

Это удивительно, но практически все авторы [1,2,9,10], описывающие сирендиповы КЭ, приводят только эту модель, как единственную возможность построения бикубической интерполяции типа Лагранжа (по заданным значениям функции в 12 – ти узлах).

Для угловых узлов функции формы имеют вид:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(9(\xi^2 + \eta^2) - 10) \quad (10)$$

$$\xi_i, \eta_i = \pm 1, i = 1, 4, 7, 10.$$

Для промежуточных узлов 2,3,8,9

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + 9\xi_i \xi) \quad (11)$$

$$\xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1$$

есть основания полагать, что этот базис был получен традиционным (матричным) методом. Нетрудно убедиться, что поверхность (10) синтезирована из гипара и параболоида вращения (отсюда название модели). Композиция (11) состоит из поверхности второго порядка и двух плоскостей.

Следует отметить, что появление альтернативных моделей позволяет оптимизировать свойства бикубической интерполяции. Для этого удобно воспользоваться процедурой взвешенного усреднения базисов:

$$\bar{N}_i(\xi, \eta) = \alpha \cdot N_i^{(p)}(\xi, \eta) + (1 - \alpha) N_i^{(q)}(\xi, \eta),$$

где  $N_i^{(p)}(\xi, \eta)$  - базисная функция  $p$  – модели;  $N_i^{(q)}(\xi, \eta)$  - соответствующая базисная функция  $q$  – модели;  $0 \leq \alpha \leq 1$  - весовой коэффициент.

Компьютерная реализация процедуры взвешенного усреднения позволяет получать бикубические поверхности с заданными свойствами.

### Выводы

Несмотря на известные преимущества предложенного метода прямого конструирования базисов, мы не склонны противопоставлять геометрические и алгебраические подходы. К лучшим результатам приводит удачное сочетание алгебраических методов, геометрического моделирования и компьютерного экспериментирования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
3. Хомченко А.Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных // III Респ. симпозиум по диффер. и интегр. уравнениям: Тез. докл. Одесса: ОГУ, 1982. – С. 257-258.
4. Хомченко А.Н. О модификации сирендиповых элементов. Деп. в ВИНТИ 4.07.83, №3643-83 Деп.
5. Хомченко А.Н., Камаева Л.И. О моделировании конечных элементов сирендипова семейства // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюзн. межвуз. сб./ Горький: ГТУ, 1985. – С. 14-17.
6. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Гучек П.И. Геометрия сирендиповых аппроксимаций // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1996. – Вып. 59. – С.40-42.
7. Хомченко А.Н., Тулученко Г.Я. Вероятностная модель функции - пагоды // Вестник Херс. нац. техн. ун-та. – Херсон: ХНТУ, 2006.- Вып. 24. – С. 95 – 98.
8. Хомченко А.Н., Крючковский В.В. О вероятностной природе поверхности постоянного кручения// Вестник Херс. нац. техн. ун-та.- Херсон: ХНТУ, 2006.- С.522-525.
9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
10. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – Ленинград: Судостроение, 1979. - 264с.