

**ЗАСТОСУВАННЯ ЛАГРАНЖЕВОГО ФОРМАЛІЗМУ В
ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНИХ
ГНУЧКИХ СТРУКТУР З НЕПОТЕНЦІАЛЬНИМИ
ДЕФОРМАТИВНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

Вступ. Однією з проблем функціонування гнучких протяжних конструкцій, що використовуються в багатьох областях техніки: будівництві, транспорті, машинобудуванні, в авіаційній і космічній техніці, у нафтовій і газовій промисловості, є їх специфічні пружні властивості, які полягають у тому, що вони працюють на розтягання і не працюють на стиск. Це приводить до появи ривків у гнучких елементах, що виникають унаслідок розслаблень при дії зовнішніх факторів (вітер, хвилі, потік, вимушені переміщення). Тривала дія перемінних зусиль і ривкових ефектів негативно позначається на міцності і надійності роботи елементів конструкцій і вузлів. Для зменшення негативних наслідків дії ривків гнучкі елементи конструкцій виготовляють із нелінійнопружних та в'язкопружних матеріалів. В даній роботі пропонується підхід до побудови рівнянь руху таких систем з врахуванням вищенаведених особливостей.

Постановка задачі. Схематично гнучку протяжну конструкцію можна вважати системою твердих тіл, з'єднаних гнучкими тілами (троси, канати, кабелі), тобто дискретно-континуальною одномірною системою. Під гнучким тілом будемо розуміти тіло, яке при малих деформаціях має значні скінченні переміщення і працює тільки на розтяг. Нехай на гнучкий елемент конструкції діють $\vec{P}^\lambda(x_k, t)$ масові сили, на частині поверхні діють поверхневі сили $\vec{F}^\lambda(x_k, t)$ і задані переміщення $\vec{u}^\lambda(x_k, t)$, де час і переміщення відліковуються від початкового незбуреного стану.

Метод розв'язання. Для знаходження розподілу напружень і деформацій в тілі обумовлених рухом тіла запишемо принцип віртуальної роботи для такої динамічної задачі [2]

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \sigma^{\lambda m} \delta e_{\lambda m} dV - \delta K - \int_V \vec{P} \delta \vec{R} dV - \int_S \vec{F} \delta \vec{R} dS \right\} dt = 0 \quad (1)$$

$$\text{тут } \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{u} \quad e = \frac{1}{2} \left(u_{,\mu}^\lambda + u_{,\lambda}^\mu + u_{,\lambda}^\chi u_{,\mu}^\chi \right)$$

Використання варіаційного принципу зручне тим, що на залежності між напруженнями і деформаціями не накладаються ніякі обмеження, тобто вони можуть бути і не потенціальними.

Для знаходження розв'язку задачі (1), за умови не потенціальності залежностей між напруженнями і деформаціями, проведемо дискретизацію системи, тобто переміщення виразимо через дискретне число узагальнених координат q_j ($j = 1, 2, \dots, N$). Переміщення можна зобразити в вигляді: $u^\lambda = u^\lambda(x^1, x^2, x^3, q_1, q_2, q_3, t)$, тоді

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j} e_j + \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}, \quad \text{а} \quad \delta \vec{R} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2)$$

Так як ми розглядаємо гнучкі протяжні елементи конструкції, то перший член у варіаційному принципі (1) можна привести до виду $\iiint_V \sigma \delta \varepsilon dV = \int_L T \delta \varepsilon ds$, де $T = \iint_F \sigma dF = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ причому функція $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ може

бути не потенціальною. Використовуючи (2), можна записати $\delta \varepsilon = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_j} \delta q_j$. Введемо $Q_j^e = \int_L T_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_j} ds$ – узагальнені внутрішні сили,

тоді $\int_L T \delta \varepsilon ds = \sum_{j=1}^N Q_j^e \delta q_j$. Підставляючи одержані вирази в (1), одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} - Q_j^3 + Q_j^e \right] \cdot \delta q_j dt = 0. \quad \text{І так як варіації незалежні, то}$$

одержимо систему N рівнянь

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j^3 - Q_j^e, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Ці рівняння являються рівняннями руху Лагранжа для тіл пружності яких може бути не потенціальною і переміщення скінченні.

Так як тверді тіла вважаються матеріальними точками і якщо $m_{Ts(i)}$ – маса твердого тіла, яке прикріплене в точці $P_{s(i)}$, то вираз для кінетичної енергії прикріплених тіл матиме вигляд

$$K_T = \sum_i \frac{m_{Ts(i)}}{2} \left(\dot{\vec{R}}_{Ts(i)} \right)^2. \quad \text{Сили, що діють на тіла, можна записати у вигляді}$$

$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{Ts(i)}$. Деталізація сил $\vec{F}_{Ts(i)}$ для деяких видів тіл приводиться в конкретних задачах. З врахуванням точок дискретизації в яких

прикріплені тіла, отримаємо $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K_T}{\partial q_j} = Q_{Tj}$, тут

$\vec{Q}_{Tj} = \sum_i \vec{F}_{Ts(i)} \frac{\partial \vec{R}_{Ts(i)}}{\partial q_{s(i)}}$ узагальнені сили від сил, що діють на тіла.

Запишемо рівняння руху системи тіл з'єднаних гнучкими елементами в нерухомій прямокутній системі координат $0x_1, x_2, x_3$. Для цього дискретизуємо систему і за узагальнені координати виберемо просторові координати точок дискретизації. Рух гнучкого елемента між точками дискретизації можна записати через $\vec{R}_i = \sum_{k=1}^3 R_{ki} \vec{e}_k$, де, R_i - функції що виражають зв'язок довжин осі гнучкого елемента і координат точок дискретизації.

Узагальнені внутрішні сили для гнучких елементів (нелінійно, непотенціально пружних з односторонньою роботою) залежність між натягом та відносним видовженням можна зобразити у вигляді

$T = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \cdot H(\varepsilon)$, де $\varepsilon = \frac{ds - dl}{dl} = \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial l} \right| - 1$ - відносне видовження. $H(\varepsilon)$ -

функція Хевісайда $= \begin{cases} 1 & \varepsilon > 0 \\ 0 & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$ будуть

$$Q_i^B = \int_{\ell_i}^{\ell_{i+1}} f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) H(\varepsilon_i) \cdot \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x_{kj}} \cdot ds = \int_{\ell_i}^{\ell_{i+1}} f \left(\left(\left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right| - 1 \right), \frac{\partial \left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right|}{\partial t} \right) H \left(\left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right| - 1 \right) \cdot \frac{\partial \left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right|}{\partial x_{kj}} \cdot \left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right| dl$$

Використовуючи традиційні вирази для кінетичної енергії та її похідних, а також узагальнених сил, рівняння руху набуде вигляду

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^{N-1} L_i \left\{ m_i \ddot{\vec{R}}_i \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \dot{x}_{kj}} - m_i \dot{\vec{R}}_i \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial x_{kj}} + f \left(\left(\left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right| - 1 \right), \frac{\partial \left(\left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right| \right)}{\partial t} \right) H \left(\left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right| - 1 \right) \left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right| \frac{\partial}{\partial x_{kj}} \left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right| + \left(\vec{f}_i^p - \vec{f}_i^m \right) \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial x_{kj}} \left| \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l} \right| \right\} d\xi + \sum_s m_{Ts(i)} \delta_j^{s(i)} \ddot{\vec{R}}_{Ts(i)} \vec{e}_k - \sum_s \delta_j^{s(i)} \vec{F}_{Ts(i)} \vec{e}_k = 0 \quad (3)$$

де $j = \overline{0, N}$; $k = 1, 2, 3$; $\xi = \frac{l - l_i}{l_{i+1} - l_i}$;

Нехай в деяких r -точках задані кінематичні крайові умови $\vec{R}_{r(i)}^0 = \vec{R}_{r(i)}^0(t)$, тоді в системі (3) кількість рівнянь зменшиться на r рівнянь з відповідними номерами.

Використовуючи запропоновану методику, запишемо рівняння руху гнучкого протяжного в'язкопружного елемента конструкції в рідині.

На гнучкий елемент діють розподілені поверхневі сили: гідродинамічного опору, інерції приєднаної маси рідини, що залучається в сумісний рух, а також розподілені об'ємні сили: ваги та сила Архімеда [3].

Тоді рівняння руху такого гнучкого елемента набудуть вигляду

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{i=0}^{N-1} L_i \left\{ m_i \ddot{\vec{R}}_i \frac{\partial \dot{\vec{R}}_i}{\partial \dot{x}_{kj}} - m_i \dot{\vec{R}}_i \frac{\partial \dot{\vec{R}}_i}{\partial x_{kj}} - m_{ai} (\dot{\vec{V}} - \dot{\vec{R}}_i) |\vec{\tau}_i| \frac{\partial \dot{\vec{R}}_i}{\partial x_{kj}} + \right. \\ & \quad \left. + (C_{Ei} (|\vec{\tau}_i| - 1) + C_{E2i} |\vec{\tau}_i|) \vec{\tau}_i \left| \frac{\partial}{\partial x_{kj}} (|\vec{\tau}_i|) \right. + \right. \\ & \quad \left. + \left\{ (\rho_c F_i |\vec{\tau}_i| - m_i) \vec{g} - \frac{C_{ai}}{|\vec{\tau}_i|} |\vec{\tau}_i| (\vec{V} - \dot{\vec{R}}_i) \vec{\tau}_i \left[(\vec{V} - \dot{\vec{R}}_i) \vec{\tau}_i \right] \frac{1}{|\vec{\tau}_i|^2} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{C_{ni}}{|\vec{\tau}_i|} \vec{\tau}_i \times (\vec{V} - \dot{\vec{R}}_i) \left(\left| (\vec{V} - \dot{\vec{R}}_i) \vec{\tau}_i \right|^2 - \vec{\tau}_i \left[(\vec{V} - \dot{\vec{R}}_i) \vec{\tau}_i \right] \right) \frac{1}{|\vec{\tau}_i|^2} \right\} \frac{\partial \dot{\vec{R}}_i}{\partial x_{kj}} \right\} d\xi + \\ & \quad + \left[\vec{g} (M_{Tj} - \rho_c V_{Tj}) + C_{Tj} \rho_c F_{Tj} \left| \vec{V} - \dot{\vec{R}}_{Tj} \right| \left(\vec{V} - \dot{\vec{R}}_{Tj} \right) + \rho_c \lambda_{Tj} v_{Tj} \frac{\partial^2 \vec{R}_{Tj}}{\partial t^2} \right] \frac{\partial \vec{R}_{Tj}}{\partial x_{kj}} = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

де $j = \overline{0, N} | r(i)$; $k = 1, 2, 3$; $\vec{\tau}_i = \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial l}$; $\xi = \frac{l - l_i}{L_i}$;

І разом з початковими умовами $\vec{R}_i |_{t=0} = \vec{R}_T$; $\dot{\vec{R}}_i |_{t=0} = \vec{V}_T$ одержимо задачу динаміки гнучкого елемента в рідині.

Для розв'язку цієї задачі систему нелінійних рівнянь в частинних похідних (4) зведемо при допомозі локальних параметричних сплайнів до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь [1]. Розв'язок нормалізованої нелінійної задачі Коші знаходимо чисельно, користуючись багатокроковими методами типу предиктор-коректор [1, 4].

Чисельні результати. Використовуючи запропонований алгоритм, розглянемо буксирування системи яка складається з двох гілок тралення, які розтягуються в протилежні сторони при допомозі вертикальних крил відвідників, що мають постійну силу F_0 відведення, направлену перпендикулярно до лінії буксирування в різні боки, підтримуючого буя який кріпиться до точки розгалуження, на хвилях.

Конкретні розрахунки проводилися для таких параметрів ПБС довжина буксирного кінця до точки розгалуження 200м, довжини відвідників по 100м, підтримуюча гілку завдовжки 100м. Початок системи координат сумістимо з точкою кріплення буксира. Задамо напрям осі $0x_1$ проти ходу хвиль, осі $0x_3$ - проти напрямку вектора \vec{g} , а вісь $0x_2$ направлена так, щоб доповнювала трійку правої системи координат. Тоді закон руху буксированого кінця прийме вигляд:

$$\begin{aligned} x_{15} &= V_b t_H + x_H & x_{25} &= 0 & x_{35} &= 0 \\ \dot{x}_{15} &= V_b & \dot{x}_{25} &= 0 & \dot{x}_{35} &= 0, \\ \ddot{x}_{15} &= 0 & \ddot{x}_{25} &= 0 & \ddot{x}_{35} &= 0 \end{aligned}$$

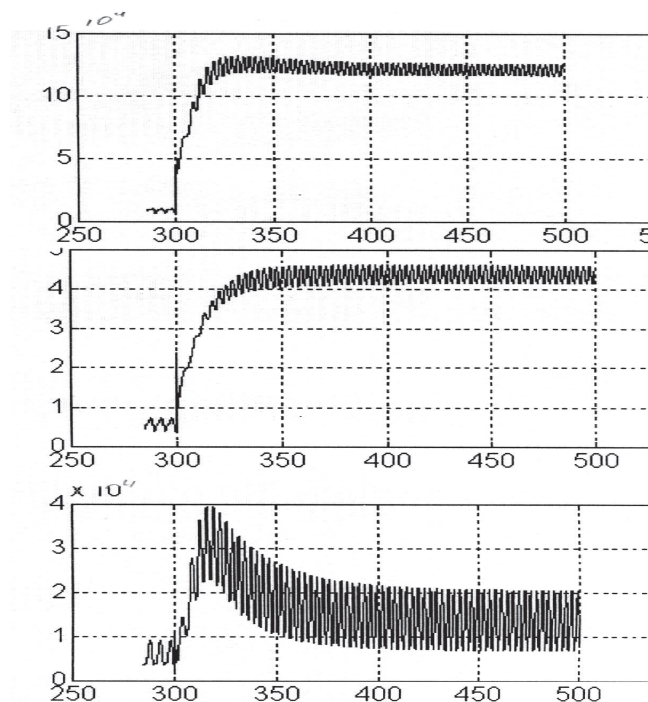


Рисунок 1

де x_H - початкове відхилення точки буксирування від початку координат. За початкову конфігурацію вибрана незбурена конфігурація структури: підводний апарат знаходиться на глибині 200 м, буй - на

поверхні води. Конкретні розрахунки проводилися для таких параметрів ПБС: довжина буксировочного троса 200м, погонна маса троса 3кг/м, площа поперечного перетину кабель-троса =0,0003м², коефіцієнти пружності =10 Н і вязкоупругості, коефіцієнти опору руху =0,78кг/м², =15,6кг/м², коефіцієнт приєднаної маси =0,4кг/м. Площа мідельового перетину циліндричного буйка 1м², маса 100 кг. Сила відведення $F_0 = 1000\text{Н}$. На рис. 1 представлені зміна натягу при сходячій зміні швидкості буксирування з $V_b = 1\text{м/с}$ на $V_b = 4\text{м/с}$ у момент часу рівний 300 секунд у корінному кінці(точці буксирування) (крива 1), у точці кріплення відвідника (крива 2) та у точці кріплення буя (крива 3), при хвилях з періодом $T_w=5,6$ с. З рисунка можна зробити висновок, що зміна натягнення носить самий різний характер. Так в корінному кінці при зростанні швидкості буксирування ростуть як самі значення натягу так і амплітуда зміни натягу $T_a = T_{\max} - T_{\min}$. В точці ж кріплення відвідника характер поведінки натягу такий же самий. В точці кріплення буя середнє значення натягу спочатку сильно зростає, а потім зменшується до величин трохи більших чим до зміни швидкості, а амплітуда значно зростає. Причому як в корінному кінці так і біля відвідника спостерігаються ривки. Такі ж закономірності зберігаються для середніх значень натягнення і амплітуд і при інших зростаннях швидкості буксирування, тоді як для T_{\max} таких закономірностей немає.

На рис. 2 представлені зміна натягу при сходячій зміні швидкості буксирування з $V_b = 1\text{м/с}$ на $V_b = 2\text{м/с}$ у момент часу рівний 300 секунд у корінному кінці(точці буксирування) (крива 1), у точці кріплення відвідника (крива 3) і в точці кріплення буя (крива 2), при хвилях з періодом $T_w=4,5\text{с}$. і буксирування виконується в напрямку ходу хвиль. З рисунка можна зробити висновок, що зміна натягу носить самий різний характер. Так у корінному кінці при рості швидкості буксирування ростуть як самі значення натягу так і амплітуда зміни натягу $T_a = T_{\max} - T_{\min}$. У точці кріплення відвідника характер поведінки натягу носить зовсім інший характер, середнє значення натягу небагато зросло в той час як амплітуда зміни натягу значно знизився. У точці кріплення буя середнє значення натягу зменшується, а амплітуда небагато зростає. При буксируванні проти ходу хвиль з періодом $T_w=8,0\text{с}$. на рис. 3 представлені натяги в тих же точках - корінному кінці(точці буксирування) (крива 1), у точці кріплення відвідника (крива 3) і в точці кріплення буя (крива 2). У корінному

кінці при рості швидкості буксирування, при буксируванні проти ходу хвиль, ростуть як значення натягу в так і сильно росте амплітуда зміни натягу. У точці кріплення відвідника характер поведінки натягу носить такий же характер як і при буксируванні по хвилі: середнє значення натягу небагато зросло в той час як амплітуда зміни натягу значно знизився. Причому як у корінному кінці так і біля відвідника спостерігаються ривки. У точці кріплення буя середнє значення натягу незначно зменшується, а амплітуда зростає. Поява ривків спостерігається як при східчастому збільшенні швидкості буксирування так і при її зменшенні.

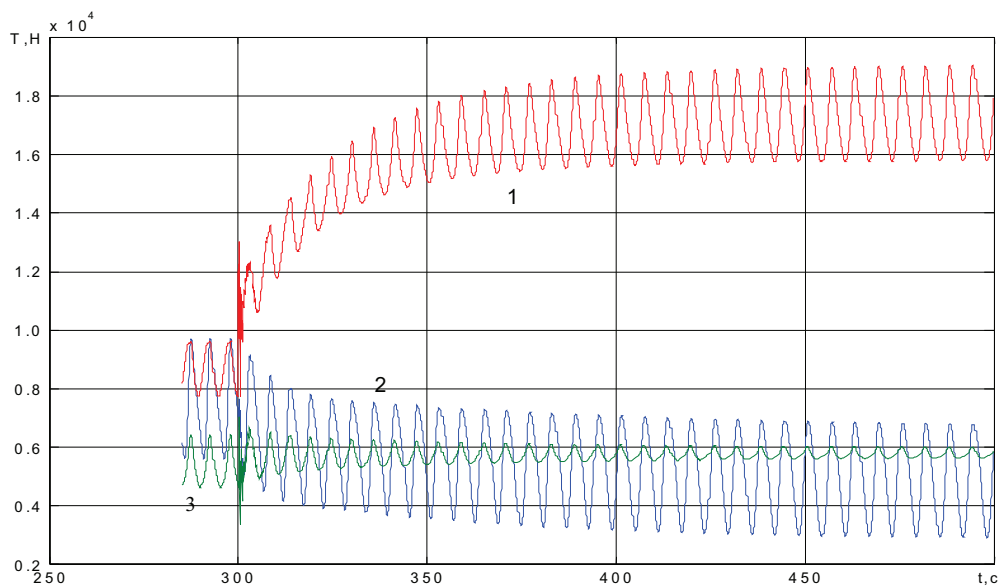


Рисунок 2

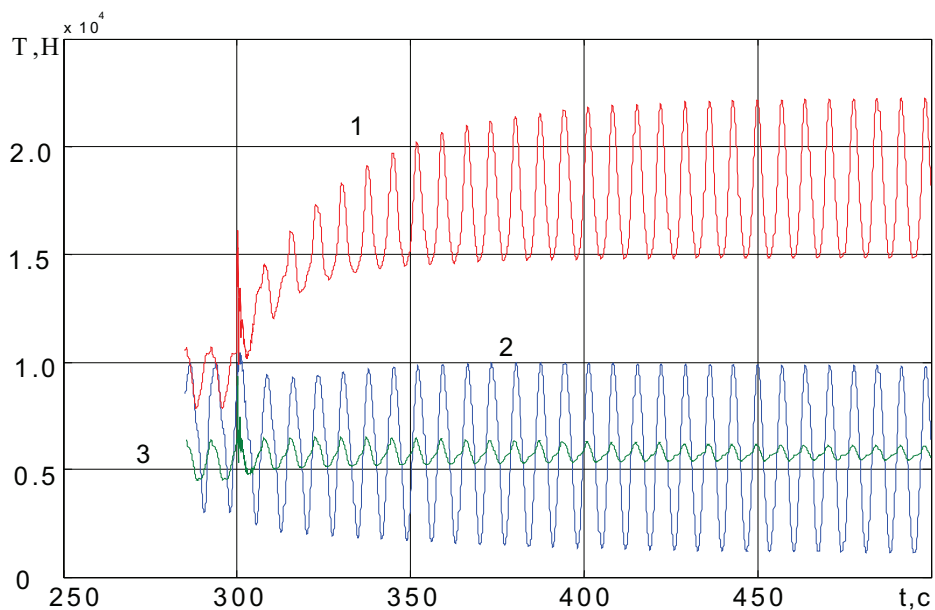


Рисунок 3

Проведений аналіз дозволяє зробити такі висновки: в'язко-пружність впливає тільки при різкій зміні швидкості буксирування і практично не впливає при буксируванні на регулярному морському хвилюванні, тобто коли немає ривків.

Висновок. Запропоновано спосіб розрахунку динаміки просторових розгалужених структур, що буксируються, який дозволяє визначити кінематичні і силові характеристики конструкції при буксируванні на хвилях як проти ходу хвиль, так і по ходу хвиль з урахуванням розслаблення в окремих її елементах, а також зміні швидкості. Проведено аналіз динамічних характеристик конкретної системи при різкій зміні швидкості буксирування і при буксируванні на регулярному морському хвилюванні з різними параметрами хвиль. Проведений аналіз дозволяє зробити такі висновки: в'язко-пружність впливає тільки при різкій зміні швидкості буксирування і практично не впливає при буксируванні на регулярному морському хвилюванні, тобто коли немає ривків. Запропонований підхід до одержання рівнянь руху дискретно-континуальних гнучких одномірних систем з непотенціально-пружними характеристиками являється узагальненням до підходів, що використовувались в [1,4].

ЛІТЕРАТУРА

1. Безверхий О.І. Про один спосіб розрахунку задач динаміки просторових гнучких стержневих систем. // Доповіді. НАН України, 1993, N2, С.46-49
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
3. Ньюмен Дж. Морская гидромеханика. – Л.: Судостроение, 1985. – 368с.
4. Шульга М.О., Безверхий О.І., До розрахунку динамічних задач для дискретно-континуальних гнучких одномірних систем з непотенціальними деформативними характеристиками // Доповіді НАН України, 2004, № 7. – С. 59-63

Получено __.__.2006 г.