УДК 539.3

П.О.Стеблянко

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОВИМІРНОГО НАПРУЖЕНОГО СПЛАЙНУ В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ

Вступ. В роботах [1,3-5] розвґязувалися нестаціонарні задачі теорії термопружності та термопластичності використовуючи тривимірну модель тіла та класичні моделі теорії оболонок. Пропонується при застосуванні методу покомпонентного розщеплення використовувати більш точні двовимірні напружені сплайни.

1. Постановка задачі. На відміну від роботи [2] в кожній допоміжній області двовимірний базисний напружений сплайн розшукуємо у вигляді наступного добутку

$$S_{2D}=\left[a_0+a_1\xi+a_2 sh\left(\sqrt{2}\xi\right)+a_3 ch\left(\sqrt{2}\xi\right)\right]\cdot\left[b_0+b_1\eta+b_2 sh\left(\sqrt{2}\eta\right)+b_3 ch\left(\sqrt{2}\eta\right)\right],\quad(1)$$

де $\xi\in[0;1],\eta\in[0;1]$, а для визначення коефіцієнтів $a_i,b_i\ ,i=0;1;2;3$ використовуються певні умови.

Для кутової області A ці умови у верхівках квадрату $A(0;0),B(0;1),C(1;0),D(1;1)$ мають вигляд

$$S_{2D}(0;0)=0\,,\ \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial\xi}=0\,,\ \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial\eta}=0\,,$$
$$\frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial\xi}=0\,,\ \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial\eta}=0\,,\qquad 2)$$
$$S_{2D}(1;0)=0\,,\ \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial\xi}=0\,,\ \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial\eta}=0$$
$$\frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial\xi}=W_D^{'}\,,\ \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial\eta}=W_D^{'}\,.$$

В кутовій області A поверхня, яку створює сплайн, симетрична відносно діагоналі $\xi=\eta$. Це означає, що в виразі (1) можна взяти

$$a_i=b_i,\ \ i=0;1;2;3\,.\qquad(3)$$

Користуючись цим, вираз (1) можна спростити

$$S_{2D}=\left[a_0+a_1\xi+a_2 sh\left(\sqrt{2}\xi\right)+a_3 ch\left(\sqrt{2}\xi\right)\right]\cdot\left[a_0+a_1\eta+a_2 sh\left(\sqrt{2}\eta\right)+a_3 ch\left(\sqrt{2}\eta\right)\right].\quad(4)$$

Звідси отримаємо перші частинні похідні

$$\frac{\partial S_{2D}}{\partial\xi}=\left[a_1+a_2\sqrt{2}ch\left(\sqrt{2}\xi\right)+a_3\sqrt{2}sh\left(\sqrt{2}\xi\right)\right]\cdot\left[a_0+a_1\eta+a_2 sh\left(\sqrt{2}\eta\right)+a_3 ch\left(\sqrt{2}\eta\right)\right],\quad(5)$$

$$\frac{\partial S_{2D}}{\partial \eta}=\left[a_0+a_1\xi+a_2 sh\left(\sqrt{2}\xi\right)+a_3 ch\left(\sqrt{2}\xi\right)\right]\cdot\left[a_1+a_2\sqrt{2}ch\left(\sqrt{2}\eta\right)+a_3\sqrt{2}sh\left(\sqrt{2}\eta\right)\right].$$

Перепишемо тепер умови (2) за допомогою формул (4), (5)

$$S_{2D}(0;0)=\left(a_0+a_3\right)^2=0,\quad \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi}=\frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta}=\left(a_0+a_3\right)\cdot\left(a_1+\sqrt{2}a_2\right)=0,$$

$$S_{2D}(0;1)=S_{2D}(1;0)=\left(a_0+a_3\right)\cdot\left(a_0+a_1+a_2 sh\sqrt{2}+a_3 ch\sqrt{2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi}=\frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta}=\left(a_1+\sqrt{2}a_2\right)\cdot\left(a_0+a_1+a_2 sh\sqrt{2}+a_3 ch\sqrt{2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi}=\frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta}=\left(a_0+a_3\right)\cdot\left(a_1+a_2\sqrt{2}ch\sqrt{2}+a_3\sqrt{2}sh\sqrt{2}\right)=0,$$

$$S_{2D}(1;1)=\left(a_0+a_1+a_2 sh\sqrt{2}+a_3 ch\sqrt{2}\right)^2=W_D, \tag{6}$$

$$\frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi}=\frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta}=\left(a_1+a_2\sqrt{2}ch\sqrt{2}+a_3\sqrt{2}sh\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_0+a_1+a_2 sh\sqrt{2}+a_3 ch\sqrt{2}\right)=W_D'.$$

Аналізуючи ці умови можна отримати систему чотирьох рівнянь відносно чотирьох невідомих коефіцієнтів. Вона має вигляд

$$\begin{aligned}&a_0+a_3=0,\\&a_0+a_1+a_2 sh\sqrt{2}+a_3 ch\sqrt{2}=\sqrt{W_D},\\&a_1+\sqrt{2}a_2=0,\\&a_1+a_2\sqrt{2}ch\sqrt{2}+a_3\sqrt{2}sh\sqrt{2}=W_D'/\sqrt{W_D}.\end{aligned} \tag{7}$$

Розв’язавши систему (7) отримаємо такі вирази для коефіцієнтів

$$a_0=k_0=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ a_1=k_1=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ a_2=k_2=\frac{\Delta_3}{\Delta},\ a_3=-k_0=-\frac{\Delta_1}{\Delta}, \tag{8}$$

де

$$\Delta=2\cdot\left[\sqrt{2}\cdot\left(ch\sqrt{2}-1\right)-sh\sqrt{2}\right],\quad \Delta_1=\sqrt{2W_D}\cdot\left(ch\sqrt{2}-1\right)+\frac{W_D'}{\sqrt{W_D}}\cdot\left(\sqrt{2}-sh\sqrt{2}\right),$$

$$\Delta_2=\sqrt{2}\cdot\left[\frac{W_D'}{\sqrt{W_D}}\cdot\left(ch\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{2W_D}\cdot sh\sqrt{2}\right],\quad \Delta_3=\frac{W_D'}{\sqrt{W_D}}\cdot\left(1-ch\sqrt{2}\right)+\sqrt{2W_D}\cdot sh\sqrt{2}. \tag{9}$$

Зазначимо, що конкретні числові значення для коефіцієнтів $a_i,\ i=0;1;2;3$ можна отримати після того як будуть відомі чисельні значення для $W_D,\ W_D'$, які не можна обирати довільно. Вони визначаються виходячи з умов норміровки сплайну, умов непрервності значень сплайну та його перших похідних в сусідніх областях. Типова поверхня в цьому випадку показана в роботі [2] на рисунку 1.

Таким чином в області А напружений сплайн задається виразом

 ISSN 1562-9945

$$S_{2D}=\left[k_0\left(1-ch\sqrt{2}\xi\right)+k_1\xi+k_2 sh\sqrt{2}\xi\right]\cdot\left[k_0\left(1-ch\sqrt{2}\eta\right)+k_1\eta+k_2 sh\sqrt{2}\eta\right]$$

2. Центральна область *C*. Для центральної області C умови у верхівках квадрату $D(0;0), N(0;1), F(1;0), M(1;1)$ мають вигляд

$$\begin{gathered}
S_{2D}(0;0)=W_D\,,\ \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial\xi}=W_D'\,,\ \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial\eta}=W_D'\,,\\
S_{2D}(0;1)=W_F\,,\ \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial\xi}=W_F'\,,\ \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial\eta}=0\,,\\
S_{2D}(1;0)=W_F\,,\ \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial\xi}=0\,,\ \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial\eta}=W_F'\,,\\
S_{2D}(1;1)=W_M\,,\ \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial\xi}=0\,,\ \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial\eta}=0\,.
\end{gathered}\tag{10}$$

В центральній області C поверхня, яку створює сплайн, теж симетрична відносно діагоналі $\xi=\eta$. Це означає, що в виразі (1) можна взяти $a_i=b_i,\ i=0;1;2;3$. Користуючись цим, вираз (1) можна представити в формі (4), а перші похідні матимуть вигляд (5).

Перепишемо умови (10) за допомогою формул (4), (5)

$$\begin{gathered}
S_{2D}(0;0)=\left(a_0+a_3\right)^2=W_D,\ \ \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial\xi}=\frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial\eta}=\left(a_0+a_3\right)\cdot\left(a_1+\sqrt{2}a_2\right)=W_D',\\
S_{2D}(0;1)=S_{2D}(1;0)=\left(a_0+a_3\right)\cdot\left(a_0+a_1+a_2 sh\sqrt{2}+a_3 ch\sqrt{2}\right)=W_F,\\
\frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial\xi}=\frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial\eta}=\left(a_1+\sqrt{2}a_2\right)\cdot\left(a_0+a_1+a_2 sh\sqrt{2}+a_3 ch\sqrt{2}\right)=W_F',\\
\frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial\xi}=\frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial\eta}=\left(a_0+a_3\right)\cdot\left(a_1+a_2\sqrt{2}ch\sqrt{2}+a_3\sqrt{2}sh\sqrt{2}\right)=0,\\
S_{2D}(1;1)=\left(a_0+a_1+a_2 sh\sqrt{2}+a_3 ch\sqrt{2}\right)^2=W_M,
\end{gathered}\tag{11}$$

$$\frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial\xi}=\frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial\eta}=\left(a_1+a_2\sqrt{2}ch\sqrt{2}+a_3\sqrt{2}sh\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_0+a_1+a_2 sh\sqrt{2}+a_3 ch\sqrt{2}\right)=0.$$

Аналізуючи умови (11) можна отримати систему чотирьох рівнянь відносно чотирьох невідомих коефіцієнтів, а також дві умови, які треба накласти на параметри $W_D, W_F, W_M, W_D', W_f'$.

Система має вигляд

$$\begin{aligned}
&a_0+a_3=\sqrt{W_D}\,,\\
&a_0+a_1+a_2 sh\sqrt{2}+a_3 ch\sqrt{2}=\sqrt{W_M}\,,\\
&a_1+\sqrt{2}a_2=W_D'/\sqrt{W_D}\,,\\
&a_1+a_2\sqrt{2}ch\sqrt{2}+a_3\sqrt{2}sh\sqrt{2}=0.
\end{aligned}\tag{12}$$

Друге та третє рівняння системи (12) можна записати ще й так

$$a_0 + a_1 + a_2 sh\sqrt{2} + a_3 ch\sqrt{2} = W_F / \sqrt{W_D}, \quad a_1 + \sqrt{2} a_2 = W'_F / \sqrt{W_M}.$$

Звідси порівнюючи можна отримати дві умови для вибору параметрів $W_D, W_F, W_M, W'_D, W'_f$. Вони мають вигляд

$$\frac{W_F}{\sqrt{W_D}} = \sqrt{W_M}, \quad \frac{W'_D}{\sqrt{W_D}} = \frac{W'_F}{\sqrt{W_M}}. \qquad (13)$$

Розв’язавши систему (12) отримаємо такі вирази для коефіцієнтів

$$a_0 = n_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, a_1 = n_1 = \frac{W'_D}{\sqrt{W_D}} - \sqrt{2}\frac{\Delta_2}{\Delta}, a_2 = n_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, a_3 = n_3 = \sqrt{W_D} - \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad (14)$$

де для цього випадку введено

$$\Delta = 2 \cdot \left(1 - ch\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} sh\sqrt{2}, \quad \Delta_1 = -l_2 \cdot \left(ch\sqrt{2} - 1\right) - l_1 \cdot \left(\sqrt{2} - sh\sqrt{2}\right), \qquad (15)$$

$$\Delta_2 = l_1\left(ch\sqrt{2} - 1\right) - l_2 sh\sqrt{2}, \quad l_1 = -\frac{W'_D}{\sqrt{2W_D}} - \sqrt{W_D} \cdot sh\sqrt{2}, \quad l_2 = \sqrt{W_M} - \frac{W'_D}{\sqrt{W_D}} - \sqrt{W_D} ch\sqrt{2}.$$

Зазначимо, що конкретні числові значення для коефіцієнтів $a_i,\ i = 0;1;2;3$ можна отримати після того як будуть вибрано чисельні значення для $W_D, W_F, W_M, W'_D, W'_F$. Типова поверхня в цьому випадку показана в роботі [2] на рисунку 2.

Таким чином в області С напружений сплайн задається виразом

$$S_{2D} = \left[n_0 + n_1\xi + n_2 sh\sqrt{2}\xi + n_3 ch\sqrt{2}\xi\right]\left[n_0 + n_1\eta + n_2 sh\sqrt{2}\eta + n_3 ch\sqrt{2}\eta\right].$$

3.Область В. Для областей B , де поєднуються поверхні A та C в вершинах квадрата $C(0;0), D(0;1), E(1;0), F(1;1)$ виконуються умови

$$S_{2D}(0;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = 0,$$

$$S_{2D}(0;1) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = W'_D, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = W'_D, \qquad (16)$$

$$S_{2D}(1;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = 0,$$

$$S_{2D}(1;1) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = W'_F.$$

В цьому випадку будемо користуватися загальним виразом (1) та першими похідними отриманими з нього

$$\frac{\partial S_{2D}}{\partial \xi} = \left[a_1 + a_2\sqrt{2}ch\left(\sqrt{2}\xi\right) + a_3\sqrt{2}sh\left(\sqrt{2}\xi\right)\right] \cdot \left[b_0 + b_1\eta + b_2 sh\left(\sqrt{2}\eta\right) + b_3 ch\left(\sqrt{2}\eta\right)\right], \qquad (17)$$

$$\frac{\partial S_{2D}}{\partial \eta} = \left[a_0 + a_1\xi + a_2 sh\left(\sqrt{2}\xi\right) + a_3 ch\left(\sqrt{2}\xi\right)\right] \cdot \left[b_1 + b_2\sqrt{2}ch\left(\sqrt{2}\eta\right) + b_3\sqrt{2}sh\left(\sqrt{2}\eta\right)\right].$$

 ISSN 1562-9945

Дванадцять умов **(16)**, з яких знаходяться вісім коефіцієнтів сплайну $a_i, b_i \ , i = 0;1;2;3$ запишемо так

$$S_{2D}(0;0) = (a_0 + a_3)\cdot(b_0 + b_3) = 0,$$
$$S_{2D}(1;0) = \left(a_0 + a_1 + a_2 sh\sqrt{2} + a_3 ch\sqrt{2}\right)\cdot(b_0 + b_3) = 0,$$
$$S_{2D}(0;1) = \left(b_0 + b_1 + b_2 sh\sqrt{2} + b_3 ch\sqrt{2}\right)\cdot(a_0 + a_3) = W_D,$$
$$S_{2D}(1;1) = \left(a_0 + a_1 + a_2 sh\sqrt{2} + a_3 ch\sqrt{2}\right)\cdot\left(b_0 + b_1 + b_2 sh\sqrt{2} + b_3 ch\sqrt{2}\right) = W_F,$$
$$\frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = \left(a_1 + \sqrt{2}a_2\right)\cdot(b_0 + b_3) = 0,$$
$$\frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = \left(a_1 + a_2\sqrt{2}ch\sqrt{2} + a_3\sqrt{2}sh\sqrt{2}\right)\cdot(b_0 + b_3) = 0,$$
$$\frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = \left(b_0 + b_1 + b_2 sh\sqrt{2} + b_3 ch\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_1 + \sqrt{2}a_2\right) = W'_D,$$
$$\frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = \left(a_1 + a_2\sqrt{2}ch\sqrt{2} + a_3\sqrt{2}sh\sqrt{2}\right)\cdot\left(b_0 + b_1 + b_2 sh\sqrt{2} + b_3 ch\sqrt{2}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = \left(b_1 + \sqrt{2}b_2\right)\cdot(a_0 + a_3) = 0,$$
$$\frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = \left(a_0 + a_1 + a_2 sh\sqrt{2} + a_3 ch\sqrt{2}\right)\cdot\left(b_1 + \sqrt{2}b_2\right) = 0,$$
$$\frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = \left(b_1 + b_2\sqrt{2}ch\sqrt{2} + b_3\sqrt{2}sh\sqrt{2}\right)\cdot(a_0 + a_3) = W'_D,$$
$$\frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = \left(b_1 + b_2\sqrt{2}ch\sqrt{2} + b_3\sqrt{2}sh\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_0 + a_1 + a_2 sh\sqrt{2} + a_3 ch\sqrt{2}\right) = W'_F.$$

Аналізуючи ці рівняння можна записати систему, з якої визначаються коефіцієнти сплайну. Так, з третьої умови видно, що $a_0 + a_3 \neq 0$. Тому з першого рівняння **(18)** виходить, що

$$b_0 + b_3 = 0. \tag{19}$$

В результаті цього тотожно задовольняються друге, п'яте та шосте рівняння.

З дев'ятого рівняння виходить, що

$$b_1 + \sqrt{2}b_2 = 0. \tag{20}$$

Ця умова тотожно задовольняє десяте рівняння **(18)**.

Оскільки з третього рівняння видно, що $b_0 + b_1 + b_2 sh\sqrt{2} + b_3 ch\sqrt{2} \neq 0$, то з восьмого рівняння виходить

$$a_1 + a_2\sqrt{2}ch\sqrt{2} + a_3\sqrt{2}sh\sqrt{2} = 0. \tag{21}$$

Третє та четверте рівняння дозволяють записати пропорцію

$$\frac{a_0 + a_1 + a_2 sh\sqrt{2} + a_3 ch\sqrt{2}}{a_0 + a_3} = \frac{W_F}{W_D}$$

звідки отримаємо таке рівняння

$$W_D \cdot \left(a_0 + a_1 + a_2 sh\sqrt{2} + a_3 ch\sqrt{2}\right) - W_F \cdot \left(a_0 + a_3\right) = 0. \qquad (22)$$

Аналогічна процедура з третім та сьомим рівнянням (18) дозволяє записати

$$W_D' \cdot \left(a_0 + a_3\right) - W_D \cdot \left(a_1 + \sqrt{2} a_2\right) = 0\,, \qquad (23)$$

а користуючись одинадцятим та дванадцятим рівняннями можна получити ще одне рівняння

$$W_D' \cdot \left(a_0 + a_1 + a_2 sh\sqrt{2} + a_3 ch\sqrt{2}\right) - W_F' \cdot \left(a_0 + a_3\right) = 0. \qquad (24)$$

Останнє рівняння отримаємо за допомогою пари третього та одинадцятого рівняння

$$W_D \cdot \left(b_1 + b_2\sqrt{2} ch\sqrt{2} + b_3\sqrt{2} sh\sqrt{2}\right) - W_D'\left(b_0 + b_1 + b_2 sh\sqrt{2} + b_3 ch\sqrt{2}\right) = 0. \qquad (25)$$

Таким чином, для визначення коефіцієнтів $a_i\ , i = 0;1;2;3$ скористаємося системою рівнянь (22), (21), (23), (24). Оскільки в правих частях цих рівнянь стоять нулі, то ненульовий розв’язок можливий лише у випадку, коли визначник системи дорівнює нулю. Саме це і має місце оскільки рівняння (22) та (24) лінійно залежні. Для доведення цього скористаємось першою та другою рівностями з (13). Поділивши обидві частини на $\sqrt{W_D}$ запишемо $\frac{W_D'}{W_D} = \frac{W_F'}{\sqrt{W_M}\sqrt{W_D}} = \frac{W_F'}{W_F}$,

а це означає, що рівняння (22) та (24) тотожні. Оберемо коефіцієнт a_0 як довільну величину, а рівняння (22), (21), (23) запишемо у вигляді системи

$$\begin{cases} a_1 + sh\sqrt{2} a_2 + \left(ch\sqrt{2} - \dfrac{W_F}{W_D}\right) a_3 = \left(\dfrac{W_F}{W_D} - 1\right) a_0, \\ a_1 + \sqrt{2} ch\sqrt{2} a_2 + \sqrt{2} sh\sqrt{2} a_3 = 0, \\ a_1 + \sqrt{2} a_2 - \dfrac{W_D'}{W_D} a_3 = \dfrac{W_D'}{W_D} a_0. \end{cases} \qquad (26)$$

Розв’язок системи (26) запишемо так

$$a_1 = \frac{m_1}{m_0} a_0, \quad a_2 = \frac{m_2}{m_0} a_0, \quad a_3 = \frac{m_3}{m_0} a_0, \qquad (27)$$

де

 ISSN 1562-9945

$$m_0 = \frac{W'_D}{W_D} \cdot \left(sh\sqrt{2} - \sqrt{2}ch\sqrt{2}\right) + \left(ch\sqrt{2} - \frac{W_F}{W_D}\right) \cdot \sqrt{2} \cdot \left(1 - ch\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}sh\sqrt{2} \cdot \left(sh\sqrt{2} - \sqrt{2}\right),$$

$$m_1 = \left(1 - \frac{W_F}{W_D}\right) \cdot \left(\frac{W'_D}{W_D} \cdot \sqrt{2}ch\sqrt{2} + 2sh\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\frac{W'_D}{W_D} \cdot \left(\frac{W_F}{W_D}ch\sqrt{2} - 1\right), \qquad (28)$$

$$m_2 = \left(\frac{W_F}{W_D} - 1\right) \cdot \left(\frac{W'_D}{W_D} + \sqrt{2}sh\sqrt{2}\right) + \frac{W'_D}{W_D} \cdot \left(ch\sqrt{2} - \sqrt{2}sh\sqrt{2} - \frac{W_F}{W_D}\right),$$

$$m_3 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{W_F}{W_D} - 1\right) \cdot \left(1 - ch\sqrt{2}\right) + \frac{W'_D}{W_D} \cdot \left(\sqrt{2}ch\sqrt{2} - sh\sqrt{2}\right).$$

Система для визначення коефіцієнтів $b_i \; , i = 0;1;2;3$ складається з рівнянь **(19)**, **(20)**, **(25)** та третього рівняння системи **(18)**. Запишемо її так

$$\begin{cases} b_0 + b_3 = 0, \\ b_1 + \sqrt{2}b_2 = 0, \\ -\frac{W'_D}{W_D} \cdot b_0 + \left(1 - \frac{W'_D}{W_D}\right) \cdot b_1 + \left(\sqrt{2}ch\sqrt{2} - \frac{W'_D}{W_D} \cdot sh\sqrt{2}\right) \cdot b_2 + \left(\sqrt{2}sh\sqrt{2} - \frac{W'_D}{W_D} \cdot ch\sqrt{2}\right) \cdot b_3 = 0, \\ b_0 + b_1 + sh\sqrt{2} \cdot b_2 + ch\sqrt{2} \cdot b_3 = \frac{W_D \cdot m_0}{(m_0 + m_3) \cdot a_0}. \end{cases} \qquad (29)$$

Оскільки

$$b_3 = -b_0, \;\; b_1 = -\sqrt{2} \cdot b_2, \qquad (30)$$

то третьому і четвертому рівнянням системи **(29)** можна придати вигляд

$$\begin{cases} l_{11} \cdot b_0 + l_{12} \cdot b_2 = 0, \\ l_{21} \cdot b_0 + l_{22} \cdot b_2 = \frac{W_D \cdot m_0}{(m_0 + m_3) \cdot a_0}, \end{cases} \qquad (31)$$

де

$$l_{11} = \frac{W'_D}{W_D} \cdot \left(ch\sqrt{2} - 1\right) - \sqrt{2} \cdot sh\sqrt{2},$$

$$l_{12} = \sqrt{2} \cdot \left(ch\sqrt{2} - 1\right) + \frac{W'_D}{W_D} \cdot \left(\sqrt{2} - sh\sqrt{2}\right), \qquad (32)$$

$$l_{21} = 1 - ch\sqrt{2}, \;\; l_{22} = sh\sqrt{2} - \sqrt{2}.$$

Система **(31)** має такий розв’язок

$$b_0 = \frac{m_4}{a_0} \cdot m_0, \;\; b_2 = \frac{m_5}{a_0} \cdot m_0, \qquad (33)$$

де для спрощення введено позначення

$$m_4 = \frac{-l_{12} \cdot W_D}{(m_0 + m_3) \cdot l_0},\ \ m_5 = \frac{l_{11} \cdot W_D}{(m_0 + m_3) \cdot l_0},\ \ l_0 = 2 \cdot \left[sh\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \left(1 - ch\sqrt{2}\right)\right]$$

Тоді за допомогою формул (30) знайдемо і решту коефіцієнтів

$$b_3 = -\frac{m_4}{a_0} \cdot m_0,\ \ b_1 = -\sqrt{2} \cdot \frac{m_5}{a_0} \cdot m_0. \tag{34}$$

Підставимо в формулу (1) всі знайдені коефіцієнти $a_i, b_i\ \ , i = 0;1;2;3$ (27), (33), (34) і після спрощення запишемо остаточний вираз для області B

$$S_{2D}(\xi, \eta) = \left(m_0 + m_1\xi + m_2 sh\sqrt{2}\xi + m_3 ch\sqrt{2}\xi\right) \cdot \left[m_4\left(1 - ch\sqrt{2}\eta\right) + m_5\left(sh\sqrt{2}\eta - \sqrt{2}\right)\right]. \tag{35}$$

Типова поверхня в цьому випадку показана в роботі [2] на рисунку 3.

4.Загальний вираз двовимірного наруженого сплайну. Поверхня двовимірного напруженого сплайну симетрична відносно вісей координат $\xi = 0$ та $\eta = 0$ і складається з шістнадцяти поєднаних частин трьох типів А (формули (4), (8), (9)), В(формули (35), (28), (34)), С (формули (4), (14), (15)) відповідно. В ці формули входять параметри базісного сплайну $W_D, W_F, W_M, W'_D, W'_F$. Деякі з них оберемо так, щоб у перетинах $\xi = 0$ та $\eta = 0$ як частинний випадок створювались одновимірні напружені базісні сплайни [1]. Тому обираємо

$$W_M = \frac{2}{3},\ \ W_F = \frac{1}{6},\ \ W'_F = 0{,}48492\,, \tag{36}$$

а користуючись формулами (13) знаходимо і W_D, W'_D

$$W_D = \frac{1}{24},\ \ W'_D = \frac{1}{4} W'_F = 0{,}12123\,. \tag{37}$$

Загальний вираз базисного напруженого сплайну для повної області визначення $\alpha_1 \in [-2;2], \alpha_2 \in [-2;2]$ можна представити так

$$S_{2D}(x;y)=\begin{cases}\left[k_0\left(1-ch\sqrt{2}\xi\right)+k_1\xi+k_2sh\sqrt{2}\xi\right]\left[k_0\left(1-ch\sqrt{2}\eta\right)+k_1\eta+k_2sh\sqrt{2}\eta\right],\\ \qquad де\ \begin{cases}\xi=x+2,\eta=y+2,x\in[-2;-1],y\in[-2;-1],(A),\\ \xi=2-y,\eta=x+2,x\in[-2;-1],y\in[1;2],\quad (A_1),\\ \xi=-x+2,\eta=-y+2,x\in[1;2],y\in[1;2],\quad (A_2),\\ \xi=y+2,\eta=-x+2,x\in[1;2],y\in[-2;-1],\ (A_3),\end{cases}\\ \left(m_0+m_1\xi+m_2sh\sqrt{2}\xi+m_3ch\sqrt{2}\xi\right)\cdot\left[m_4\left(1-ch\sqrt{2}\eta\right)+m_5\left(sh\sqrt{2}\eta-\sqrt{2}\right)\right],\\ \qquad де\ \begin{cases}\xi=x+1,\eta=y+2,x\in[-1;0],y\in[-2;-1],\quad (B),\\ \xi=y+1,\eta=x+2,x\in[-2;-1],y\in[-1;0],\quad (B_1),\\ \xi=1-y,\eta=x+2,x\in[-2;-1],y\in[0;1],\quad (B_2),\\ \xi=x+1,\eta=2-y,x\in[-1;0],y\in[1;2],\quad (B_3),\\ \xi=-x+1,\eta=-y+2,x\in[0;1],y\in[1;2],\quad (B_4),\\ \xi=-y+1,\eta=-x+2,x\in[1;2],y\in[0;1],\quad (B_5),\\ \xi=y+1,\eta=-x+2,x\in[1;2],y\in[-1;0],\quad (B_6),\\ \xi=-x+1,\eta=y+2,x\in[0;1],y\in[-2;-1],\quad (B_7),\end{cases}\\ \left(n_0+n_1\xi+n_2sh\sqrt{2}\xi+n_3ch\sqrt{2}\xi\right)\left(n_0+n_1\eta+n_2sh\sqrt{2}\eta+n_3ch\sqrt{2}\eta\right),\\ \qquad де\ \begin{cases}\xi=x+1,\eta=y+1,x\in[-1;0],y\in[-1;0],\quad (C),\\ \xi=1-y,\eta=x+1,x\in[-1;0],y\in[0;1],\quad (C_1),\\ \xi=-x+1,\eta=-y+1,x\in[0;1],y\in[0;1],\quad (C_2),\\ \xi=y+1,\eta=-x+1,x\in[0;1],y\in[-1;0],\quad (C_3).\end{cases}\end{cases}$$

Введемо допоміжні функції довільного аргумента t

$$\varphi_k(t)=k_0\left(1-ch\sqrt{2}t\right)+k_1t+k_2sh\sqrt{2}t,\quad \varphi_m(t)=m_0+m_1t+m_2sh\sqrt{2}t+m_3ch\sqrt{2}t,$$
$$\psi_m(t)=m_4\left(1-ch\sqrt{2}t\right)+m_5\left(sh\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right),\quad \varphi_n(t)=n_0+n_1t+n_2sh\sqrt{2}t+n_3ch\sqrt{2}t,$$

де

k_0 = - 0,57235; k_1 = -0,37114; k_2 = 0,26244;
m_0 = 3,78066; m_1 = -10,62084; m_2 = 7,28425;
m_3 = -4,31838; m_4 = 0,19552; m_5 = 0,29351;
n_0 = -0,42838; n_1 = 2,56711; n_2 = -1,39527; n_3 = 0,6325.

Тоді вираз для інтерполяційного двовимірного напруженого сплайну на сітці ω_h буде таким

$$W(\xi;\eta)=\varphi_k(\xi)\left[b_1\varphi_k(\eta)+b_5\varphi_k(1-\eta)\right]+\varphi_k(1-\xi)\left[b_{13}\varphi_k(\eta)+b_9\varphi_k(1-\eta)\right]+$$
$$+\varphi_m(\xi)\left[b_2\psi_m(\eta)+b_7\psi_m(1-\eta)\right]+\psi_m(\xi)\left[b_3\varphi_m(\eta)+b_6\varphi_m(1-\eta)\right]+$$
$$+\varphi_m(1-\xi)\left[b_{15}\psi_m(\eta)+b_{10}\psi_m(1-\eta)\right]+\psi_m(1-\xi)\left[b_{14}\varphi_m(\eta)+b_{11}\varphi_m(1-\eta)\right]+$$
$$+\varphi_n(\xi)\left[b_4\varphi_n(\eta)+b_8\varphi_n(1-\eta)\right]+\varphi_n(1-\xi)\left[b_{16}\varphi_n(\eta)+b_{12}\varphi_n(1-\eta)\right]$$

або таким

$$W(\xi;\eta)=\varphi_k(\eta)\left[b_1\varphi_k(\xi)+b_{13}\varphi_k(1-\xi)\right]+\varphi_k(1-\eta)\left[b_5\varphi_k(\xi)+b_9\varphi_k(1-\xi)\right]+$$
$$+\varphi_m(\eta)\left[b_3\psi_m(\xi)+b_{14}\psi_m(1-\xi)\right]+\psi_m(\eta)\left[b_2\varphi_m(\xi)+b_{15}\varphi_m(1-\xi)\right]+$$
$$+\varphi_m(1-\eta)\left[b_6\psi_m(\xi)+b_{11}\psi_m(1-\xi)\right]+\psi_m(1-\eta)\left[b_7\varphi_m(\xi)+b_{10}\varphi_m(1-\xi)\right]+$$
$$+\varphi_n(\eta)\left[b_4\varphi_n(\xi)+b_{16}\varphi_n(1-\xi)\right]+\varphi_n(1-\eta)\left[b_8\varphi_n(\xi)+b_{12}\varphi_n(1-\xi)\right].$$

Висновки. Розроблено двовимірні напружені сплайн-функції, які можуть застосовуватися при визначенні напружено-деформованого стану просторових тіл, пластин та оболонок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стеблянко П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304с.
2. Стеблянко П.А. Применение двухмерного кубического сплайна для описания геометрических объектов// Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 3 (44) .- Дніпропетровськ, 2006.- С. -107-111.
3. Steblyanko P.A. The schemes of abnormally high accuracy solution of non-stationary problems of theory of thermo-elastic-plasticity for plates and shells// The Fifth International Congress on Thermal Stresses and Related Topics. Vol.1 – Virginia Politechnic Institute and State University Blacksburg, Virginia, USA. – June 8-11,2003.- P. 231 –234.
4. Steblyanko P.A. The method of solving of non-stationary coupled problems of the theory of thermal-plasticity for the rotation shells// International congress of Theoretical and Applied Mechanics 15-21 August 2004, Warsav, Poland.- P. 212.
5. Shevchenko Yu.N., Steblyanko P.A. The non-stationary 2D and 3D coupled problems of thermal-elastic-plasticity// TS2005-6th International Congress on Thermal Stresses, May 26-29, 2005. Vienna, Austria. - p. 231-234.

Получено __.__.2006 г.