В.И.Гололобов

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОЛЬЦЕВОГО ПЬЕЗОВИБРАТОРА КАК ЭЛЕМЕНТА АКТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Широкое распространение активных систем во многих областях техники в настоящее время сопровождается интенсивным развитием систем активной виброзащиты [1] и контроля колебаний механических систем. Этому способствуют успехи в технологии создания монолитных конструкций с встроенными электромеханическими преобразователями. Объединение таких конструкций с активными электрическими цепями приводит к динамическим системам, в составе которых поведение механической подсистемы можно контролировать, изменяя параметры электрической цепи.

Необходимым элементом, обеспечивающим согласованную совместную работу системы, является датчик, который вырабатывает электрическое напряжение, пропорциональное механической деформации вибратора.

Рассматривается осциллятор в виде биморфного кольца прямоугольного поперечного сечения с пьезоупругим и вязкоупругим слоями. Принимается, что размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом кольца r и напряженно-деформированное состояние определяется только окружной деформацией ε, напряжениями σ_p в пьезоупругом и σ_v вязкоупругом слоях.

Пусть сечение пьезослоя прямоугольное и на его цилиндрических поверхностях нанесены электроды. При радиальной предварительной поляризации пьзокерамического материала определяющее уравнение имеет вид [2]

$$\varepsilon = s_{11}^{E}\,\sigma_p + d_{31}\,E \tag{1}$$

$$E = -\frac{U}{h_p}, \quad \varepsilon = \frac{w}{r} \tag{2}$$

Здесь E - напряженность электрического поля в пьезоматериале, U - электрическое напряжение на электродах пьезопреобразователя, d_{31} - пьезомодуль, s_{11}^{E} - податливость при постоянном электрическом

 ISSN 1562-9945

поле, h_p-толщина пьезоактивного слоя. Отметим, что значения пьзомодуля определяются отрицательными числами, а значения податливости-положительными.

Связь между напряжениями и деформациями для вязкоупругого материала принимается согласно модели Фойгта [3]

$$\sigma_v = q_0\,\varepsilon + q_1\,\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{3}$$

Датчик деформаций и пьезопреобразователь соединены с активной электрической цепью, которая определяет связь между деформацией кольца и электрическим напряжением на преобразователе в виде

$$\frac{dU}{dt} = K_0\,\varepsilon + K_1\,\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{4}$$

В данной работе анализируется влияние параметров электрической цепи K_0 и K_1 на характер свободных колебаний системы.

Уравнение движения для элемента кольца имеет вид

$$(\rho_v h_v + \rho_p h_p)\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{\sigma_p h_p + \sigma_v h_v}{r} = 0 \tag{5}$$

где h_v- толщина цилиндрического вязкоупругого слоя кольца.

Представим (1)-(5) в виде системы уравнений относительно w и U

$$\begin{gathered}(\rho_v h_v + \rho_p h_p)\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{h_v q_1}{r^2}\frac{dw}{dt} + \left(\frac{h_v q_0}{r^2} + \frac{h_p}{r^2}\frac{1}{s_{11}^E}\right)w + \frac{1}{r}\frac{d_{31}}{s_{11}^E}U = 0\,, \\ \frac{dU}{dt} = K_1\frac{1}{r}\frac{dw}{dt} + K_0\frac{1}{r}w\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Зависимость от времени частных решений этой системы уравнений имеет вид $\exp(s_i t)$, где s_i- корни характеристического уравнения

$$a s^3 + b s^2 + c s + d = 0 \tag{7}$$

$$\begin{gathered} a = \rho_v h_v + \rho_p h_p,\ b = \frac{h_v q_1}{r^2}, \\ c = \frac{h_v q_0}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{h_p}{s_{11}^E} + K_1\frac{1}{r^2}\frac{d_{31}}{s_{11}^E},\ d = K_0\frac{1}{r^2}\frac{d_{31}}{s_{11}^E}. \end{gathered} \tag{8}$$

Убывание или возрастание во времени каждого частного решения, как апериодического, так и колебательного характера, связано со знаком коэффициента в показателе действительной экспоненциальной временной функции в этом решении.

В плоскости K_0K_1 область, каждой точке которой соответствует электромеханическая система с убывающими частными решениями, ограничена линиями, на которых по крайне мере в одном из частных решений коэффициент в показателе экспоненты принимает нулевое значение [4]. При этом апериодическое частное решение становится независимым от времени, а колебательные – становятся синусоидальными функциями времени. Для определения этих граничных линий рассмотрим соответствующие установившиеся режимы.

Установившиеся колебания. Для определения переменных составляющих электромеханического состояния в установившемся режиме принимаем, что, в соответствие с методом комплексных амплитуд, перемещение и электрическое напряжение изменяются во времени по закону $\exp\,(j\ \omega t)$. Приравняв нулю действительную и мнимую часть характеристического уравнения (7) при $s = j\,\omega$

$$d - b\,\omega^2 = 0\,,\ c - a\,\omega^2 = 0\,, \tag{9}$$

получим соотношение

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,. \tag{10}$$

Подставив сюда выражения для коэффициентов по формулам (8), находим связь между параметрами K_0 и K_1, которая на плоскости параметров K_0K_1 изображается прямой линией

$$K_1 = \alpha\,K_0 + \beta\,, \tag{11}$$

где

$$\alpha = \frac{\rho_v\,h_v + \rho_p\,h_p}{h_v\,q_1}r^2\,, \quad \beta = \frac{h_v\,q_0 + \dfrac{h_p}{s_{11}^E}}{\left|\dfrac{d_{31}}{s_{11}^E}\right|}\,. \tag{12}$$

Эту прямую можно считать границей области устойчивости в плоскости параметров. Проверка показывает, что системам с затухающими колебаниями соответствуют точки, расположенные ниже этой прямой.

 ISSN 1562-9945

Стационарное частное решение. Стационарное апериодическое решение соответствует нулевому действительному корню. Из свойства корней кубического уравнения (7)

$$s_1 s_2 s_3 = -d/a \tag{13}$$

видно, что при этом $d = 0$ и, следовательно, $K_0 = 0$. Остальные корни удовлетворяют квадратному уравнению

$$as^2 + bs + c = 0\,, \tag{14}$$

дискриминант которого $D = b^2 - 4\ a\ c$ обращается в нуль при

$$K_1 = K_1^c = \beta - \frac{1}{\rho_м h_v + \rho_p h_p} \frac{s_{11}^E}{|d_{31}|} (\frac{q_1 h_v}{2r})^2\,. \tag{15}$$

При этом

$$s_1 = s_2 = -\frac{b}{2a}\,. \tag{16}$$

Из (9) видно, что коэффициент c является положительным числом, для чего параметр K_1 должен удовлетворять условию

$$K_1 \le \beta\,. \tag{17}$$

В точке $K_1 = \beta$ два действительных корня обращаются в нуль, а на интервале $\beta \ge K_1 \ge K_1^c$ оба корня уравнения (14) отрицательны.

Из выражения для дискриминанта в виде

$$D = (K_1 - K_1^c)\frac{4a}{r^2}\frac{|d_{31}|}{s_{11}^E} \tag{18}$$

следует, что при $K_1 \le K_1^c$ система имеет колебательный характер и частота ее собственных колебаний $\omega = \sqrt{-D}$ возрастает с уменьшением K_1.

Линия $K_0 = 0$ является граничной и при $K_0 \le 0$ по крайней мере один действительный корень меньше нуля, что видно из соотношения (13). Действительные части комплексно сопряженных корней под другой граничной линией (11) также отрицательны. В области, ограниченной этими линиями, условие равенства нулю дискриминанта кубического уравнения

$$\left(\left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{bc}{6a^2} + \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \left(\frac{b}{3a}\right)^2\right)^3 = 0$$

ограничивает зоны с тремя действительными корнями. В рассмотренном численном примере такая зона имеет вид треугольника и прилегает одной стороной к оси K_1 в районе значения $K_1 = K_1^c$, при этом все корни меньше нуля. Таким образом, в плоскости параметров K_0K_1 область устойчивости может располагаться в левой полуплоскости ниже прямой (21).

Отметим, что $K_1=0$ соответствует характеристике электрической цепи вида

$$\frac{dU}{dt} = K_0\varepsilon .$$

Из анализа области устойчивости двухпараметрической системы в плоскости параметров K_0 и K_1, видно, что в данном случае областью устойчивости является отрезок $-\beta/\alpha \le K_0 \le 0$. При $K_0=-\beta/\alpha$ амплитуда периодического частного решения не зависит от времени, а с увеличением K_0 затухание увеличивается. При этом затухание апериодического решения уменьшается и при $K_0=0$ это решение представляет ступенчатую функцию.

В качестве примера рассмативалось кольцо с толщиной каждого слоя 0,0001*м* и радиусом, равным 0,1*м*. Для вязкоупругого слоя принято $q_0 = 10^{11}$ *Па* и $q_1 = 5 \cdot 10^6$ *Па* $\cdot$ *сек*, а для электроупругого слоя использованы данные для пьезокерамики *PZT-4* [2]. При этом величины α, β, K_1^c соответственно равны $2{,}0 \cdot 10^{-5}$ *сек*, $1{,}814 \cdot 10^7$ *В* и $1{,}188 \cdot 10^7$ *В*, а положения вершины треугольной зоны с тремя действительными корнями определяется координатами $K_0=-0{,}4 \cdot 10^{12}$ *В/сек* и $K_1 = 1{,}025 \cdot 10^7$ *В*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Динамические свойства линейных виброзащитных систем / Под ред Фролова К.В.-М.:Наука, 1982.-206 с.
2. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.- В кн.: Физическая акустика / Под ред. У.Мэзона.-М.: Мир, 1966, т. 1, ч. А, с. 204-326.
3. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости.-М.:Мир,1974.-384с.
4. Булгаков Б.В. Колебания.-М.: Госиздат техн.-теор.лит.,1954.-892 с.

Получено __.__.2006 г.