УДК 539.3

А.Н. Давидчик

ВЕРХНИЕ ГРАНИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ КЛАССОВ W_1^r

Класс Γ_p^ρ образован непрерывными функциями $f(t)$ представленными в виде $f(t) = u(\rho,t)$, $0<\rho<1$, где функция $u(\rho,t)$ гармонична в круге $\{(x,y)|x^2+y^2<1\} \Leftrightarrow r<1$ и удовлетворяет неравенству

$$\|u(r,\cdot)\|_p \le 1, \quad 0 \le r < 1$$

Функции класса Γ_p^ρ представляются в виде интеграла Пуассона

$$f(t) = \left(X_\rho * z\right)(t),$$

где

$$X_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt, \qquad \|z\|_p \le 1$$

$$\Gamma_p^{0,\rho} = \left\{f \middle| f \in \Gamma_p^\rho, \ f \perp 1\right\}$$

Определим классы функций допускающих представление в виде свертки

$$W_p(K) = \left\{f \middle| f = a + K*\theta, \ \ \|\theta\|_p \le 1\right\}, \tag{1}$$

где

$$(K*\theta)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(t-u)\cdot\theta(u)du \tag{2}$$

и

$$W_p^0(K) = \left\{f \middle| f = a + K*\theta, \ \|\theta\|_p \le 1, \quad \theta \perp 1\right\} \tag{3}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Если функция $K(t)$ − четная или нечетная и M_n − произвольное подпространство из L_1, содержащее константы, то для $p \in [1,\infty]$ справедливы равенства

$$E\left(W_1^0(K), M_n\right)_p = \frac{1}{2}\sup E\left(K(\cdot+t') - K(\cdot+t''), M_n\right)_{p'} \tag{4}$$

и

$$E\left(W_1\ (K), M_n\right)_p = \sup E\left(K\left(t' - \cdot\right), M_n\right)_{p'} \tag{5}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\rho} = 1$$

<u>Доказательство.</u> В силу теорем двойственности Никольского

$$E\left(f, M_n\right)_p = \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t) dt \tag{6}$$

отсюда

$$\begin{aligned} E\left(W_1^0, (K), M_n\right)_p &= \sup_{f \in W_1^0, (K)} \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t) dt = \\ &= \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|\theta\|_1 \le 1 \\ \theta \perp 1\end{smallmatrix}\right\}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(K * \theta\right)(t) \cdot g(t) dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Но если функция K – четная или нечетная, то из (8) получим

$$\begin{aligned} E\left(W_1^0, (K), M_n\right)_p &= \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|\theta\|_1 \le 1 \\ \theta \perp 1\end{smallmatrix}\right\}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(K * g\right)(t) \cdot \theta(t) dt = \\ &= \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \inf_{\lambda} \left\|K * g - \lambda\right\|_\infty = \frac{1}{2} \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \sup_{t', t''} \left|\left(K * g\right)(t') - \left(K * g\right)(t'')\right| \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} E\left(W, (K), M_n\right)_p &= \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \sup_{\|\theta\|_1 \le 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(K * g\right)(t) \cdot \theta(t) dt = \\ &= \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \left\|K * g\right\|_\infty = \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \sup_t \left|\left(K * g\right)(t)\right|. \end{aligned} \tag{9}$$

Из (8) далее получаем

$$\begin{aligned} E\left(W_1^0 (K), M_n\right)_p &= \frac{1}{2} \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \max_{t', t''} \left|\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(K(t' - u) - K(t'' - u)\right) g(u) du\right| = \\ &= \frac{1}{2} \max_{t', t''} \sup_{\left\{\begin{smallmatrix}\|g\|_{p'} \le 1 \\ g \perp M_n\end{smallmatrix}\right\}} \left|\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(K(t' - u) - K(t'' - u)\right) g(u) du\right|. \end{aligned} \tag{10}$$

Снова используя теорему двойственности окончательно получаем

$$E\left(W_1^0(K), M_n\right)_p = \frac{1}{2}\sup_{t',t''} E\left(K\left(t'-\cdot\right) - K\left(t''-\cdot\right), M_n\right)_p .$$

Из равенства (9) аналогично следует утверждение

$$E\left(W_1\ (K), M_n\right)_p = \sup_t E\left(K\left(t-\cdot\right), M_n\right)_p .$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если M_n – инвариантно относительно сдвига аргумента, то

$$E\left(K\left(t-\cdot\right), M_n\right)_p = E\left(K, M_n\right)_p . \tag{11}$$

Следствие 1. Для всех r = 1,2…

$$E\left(W_1^r, T_n\right)_p = \frac{1}{2}\max_{t',t''} E\left(D_r\left(t'-\cdot\right) - D_r\left(t''-\cdot\right), M_n\right)_p \tag{12}$$

где

$$D_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{\pi k}{2}\right)}{K^r}.$$

Доказательство следует из теоремы 1 и интегрального представления для $f \in W_1^r$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(u)du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(u) D_r\left(t-u\right)du.$$

Следствие 2. Для всех n = 1,2,… $\rho \in [1.\infty]$ и $\rho \in (0,1)$

$$E\left(\Gamma_1^{0,\rho}, M_n\right)_p = \frac{1}{2}\max_{t',t''} E\left(X_\rho\left(t'-\cdot\right) - X_\rho\left(t''-u\right), M_n\right)_p , \tag{13}$$

где $X_\rho(t)$ – ядро Пуассона

$$X_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt = \frac{1-\rho^2}{2\left(1 - 2\rho\cos t + \rho^2\right)} \tag{14}$$

и

$$E\left(\Gamma_1^{0,\rho}, M_n\right)_p = \max_t E\left(X_1\left(t-\cdot\right), M_n\right)_p . \tag{15}$$

Теорема 2. При всех r = 1,2,… справедливы асимптотические равенства

$$E\left(W_1^r, T_n\right)_2 = \frac{1}{n^{r-0,5}}\left(\frac{1}{2}\sup_{y\geq 0}\int_1^{\infty}\frac{1-\cos yu}{u^{2r}}du\right)^{\frac{1}{2}} + 0\left(\frac{1}{n^r}\right) \tag{16}$$

Из следствия 1 при $M_n = T_n$ и p = 2 следует, что

$$E_n^2\left(W_1^r\right)_2 = \frac{1}{4}\sup_{t',t''}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1-\cos k\left(t'-t''\right)}{k^{2r}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}} - \min\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^{2r}}\right). \tag{17}$$

Положим

 ISSN 1562-9945

$$K_{n,r}(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^{2r}}.$$

так как

$$\cos kt = \frac{0{,}5t}{\sin 0{,}5t}\int_{k-0{,}5}^{k+0{,}5}\cos xt dx \qquad (18)$$

то при $n \to \infty$ равномерно по t

$$K_{n,r}(t) = \frac{0{,}5t}{\sin 0{,}5t}\sum_{k=n}^{\infty}\int_{k-0{,}5}^{k+0{,}5}\frac{\cos xt}{k^{2r}}dx = \frac{0{,}5t}{\sin 0{,}5t}\int_{k-0{,}5}^{k+0{,}5}\frac{\cos xt}{k^{2r}}dx + 0\left(\frac{1}{n^{2r}}\right) =$$
$$= \frac{1}{n^{2r-1}}\cdot\frac{0{,}5t}{\sin 0{,}5t}\int_{1}^{\infty}\frac{\cos ntu}{u^{2r}}du + 0\left(\frac{1}{n^{2r}}\right). \qquad (19)$$

В силу теоремы Римана-Лебета

$$\lim_{y\to\infty}\int_{1}^{\infty}\frac{\cos yu}{u^{2r}}du = 0 \qquad (r = 1,2,...)$$

А отсюда, и из (19) следует. что существует число H такое, что

$$\min_{t\geq 0} K_{n,r}(t) = \frac{1}{n^{2r-1}}\min_{nt\in[0,H]}\frac{0{,}5t}{u^{2r}}du + 0\left(\frac{1}{n^{2r}}\right). \qquad (20)$$

Сопоставляя (20) и (18) получим утверждение теоремы 2.

Напомним, что n – мерным поперечником (по Колмогорову) центрально-симметричного множества $\aleph$ в линейном нормированном пространстве X размерности не меньше n называется величина

$$d_n(\aleph, X) = \inf_{F_n} E(\aleph, F_n)_x,$$

где нижняя грань берется по всем подпространствам F_n фиксированной размерности n.

Получено ___.___.2006 г.