

УДК 622.026

П.З.Луговой, З.Барановский

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАЗРЫВНЫХ ВОЛН С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ПОРОД

Введение. При решении задач устойчивости горных выработок под действием сейсмических, взрывных и волн от горных ударов существенное внимание стало уделяться изучению движения разрывных волн, моделируемых поверхностями фронтов, переносящих импульс давления [1,2]. Для описания этих явлений удобно применять нулевое приближение лучевого метода [3,4]. При его использовании нет необходимости следить за динамическим процессом во всей области рассматриваемого поля, а достаточно ограничиться анализом динамики пород только на участке поверхности фронта, представляющем интерес.

При перестройке и распространении волнового фронта его гладкость может нарушаться, а в местах сформировавшихся геометрических особенностей возникают всплески функций деформаций и напряжений [5–9]. Проанализировать особенности на фронтах разрывных волн в анизотропных породах оказывается намного сложнее задачи их определения в изотропных породах, поскольку в первом случае приходится решать систему существенно нелинейных уравнений. В данной работе их исследование осуществляется с помощью методики, основанной на совместном применении метода Ньютона и процедуры продолжения по параметру [10, 12]. На основе предложенного подхода исследовано взаимодействие плоских фронтов разрывных волн, распространяющихся в трансверсально-изотропных упругих средах с естественными или созданными при ведении горных работ криволинейными поверхностями их раздела. Установлено, что в зависимости от упругих характеристик пород, разделенных криволинейными поверхностями, они могут как усиливать, так и ослаблять действие разрывных волн. В данной работе вопросы фокусировки и рассеивания разрывных волн напряжений изучаются применительно к слоистым упругим средам с параболоидными поверхностями раздела.

Постановка задачи. Уравнения теории линейной упругости анизотропных сред включают следующие соотношения:

1. Уравнения движения элемента упругой среды

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где σ_{ik} – компоненты тензора упругих напряжений, x_k – декартовы координаты, f_i – компоненты вектора плотности массовых сил, u_i – компоненты вектора упругих перемещений, ρ – плотность вещества упругой среды, t – время.

2. Соотношения Коши для вычисления деформаций ε_{ik} сплошной среды

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

3. Соотношения Гука

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ij,kl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где $c_{ij,kl}$ – компоненты тензора упругих постоянных среды.

В рассматриваемом случае исследования будут проводиться в трансверсально-изотропных средах, характеризуемых пятью неустраняемыми параметрами упругости λ, μ, l, m, p , где λ и μ – параметры Ламе, l, m, p – параметры анизотропии [3].

При решении задач о распространении разрывных волн в упругих средах будем использовать лучевой метод [3, 4]. Его применение связано с постановкой и решением двух задач. Первая из них – кинематическая. Она заключается в геометрическом построении лучей и системы подвижных фронтов, а также в выявлении каустик и геометрических особенностей, в окрестности которых интенсивность поля неограниченно (в рамках теории упругости) возрастает [5, 13]. Вторая задача является чисто динамической. Она связана с определением полей напряжений в некоторой окрестности поверхности волнового фронта и решается с помощью системы уравнений переноса.

Рассмотрим решения уравнений (1) – (3) движения упругой анизотропной среды в форме плоской монохроматической волны с

волновым числом k и фазовой скоростью v . Ее фронтами являются поверхности постоянных фаз

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const}, \quad (4)$$

локально совпадающие с площадками, перпендикулярными орту \mathbf{n} и движущиеся со скоростью $\mathbf{v} = v \mathbf{n}$.

Вопрос об определении вектора поляризации \mathbf{A} волны и ее фазовой скорости v для выбранного направления \mathbf{n} решается на основе однородной системы алгебраических уравнений [3]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1,2,3). \quad (5)$$

Из условия существования нетривиальных решений этой системы следует уравнение третьей степени относительно v^2

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (6)$$

с помощью которого для каждого \mathbf{n} можно найти

$$\left[v(\mathbf{n})^{(1)} \right]^2 > \left[v(\mathbf{n})^{(2)} \right]^2 \geq \left[v(\mathbf{n})^{(3)} \right]^2 > 0. \quad (7)$$

Здесь $v^{(1)}$ – скорость распространения фронта квазипродольной qP-волны; $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ – соответствуют скорости для двух квазипоперечных qS-волн.

Энергия волнового поля в анизотропных средах распространяется с групповой (лучевой) скоростью, которая в общем случае отличается от фазовой скорости величиной и направлением. Разделив усредненный по времени поток энергии на ее плотность, можно получить выражения для составляющих вектора лучевой скорости

$\mathbf{o}^{(r)} = \sum_{k=1}^3 \xi_k^{(r)} \mathbf{i}_k$. Лучевая и фазовая скорости связаны соотношением

$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{o}^{(r)}) = v^{(r)}$ из которого следует, что лучевая скорость не может быть меньше фазовой, а их равенство может наблюдаться только в случае, когда они совпадают по направлению.

Если рассматривать разрывную волну, то из (4) следует, что поверхность ее фронта можно представить соотношением $\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0$, в котором функция τ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (8)$$

обобщающему уравнение пути, пройденного фронтом разрывной волны, в анизотропной среде. Входящие в (8) величины p_k ($k = 1, 2, 3$) представляют собой компоненты вектора рефракции $p_k \equiv \partial\tau/\partial x_k = n_k/v^{(r)}(\mathbf{n})$ ($k = 1, 2, 3$).

Для построения волнового фронта необходимо найти решения уравнения (8), которое с помощью метода характеристик приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_k/d\tau &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k/d\tau &= \sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Первая группа этих уравнений описывает распространение волны вдоль луча с лучевой скоростью $\mathbf{o} = \mathbf{o}^{(r)}(\mathbf{n}, x_k)$. При заданных начальных условиях система дифференциальных уравнений (9) имеет единственное решение

$$x_k = x_k(\alpha, \beta, \tau), \quad p_k = p_k(\alpha, \beta, \tau), \quad (k = 1, 2, 3), \quad (10)$$

непрерывное вместе со всеми его частными производными относительно лучевых координат α, β, τ .

Однозначность соответствия лучевой (α, β, τ) и декартовой (x_1, x_2, x_3) систем определяется якобианом перехода от x_1, x_2, x_3 к α, β, τ [5]

$$J(\alpha, \beta, \tau) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\alpha, \beta, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \beta} & \frac{\partial x_2}{\partial \beta} & \frac{\partial x_3}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau} & \frac{\partial x_3}{\partial \tau} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

При этом отношение $L = J(\tau)/J(\tau_0)$ называется расходимостью лучей. Здесь τ_0 – значение координаты τ на некоторой исходной (начальной) поверхности фронта.

Поверхности, на которых якобиан $J(\tau)$ обращается в нуль, являются каустическими. На них уравнение семейства лучей $x = x(\alpha, \beta, \tau)$ не может быть однозначно разрешено относительно α, β ,

τ , что соответствует бесконечному сближению лучей и возникновению особенностей поля. Поэтому точки, в которых якобиан (11) вырождается, являются бифуркационными.

Построенная с помощью (10) система лучей и фронтов позволяет приступить к определению интенсивности волны в окрестности фронта. Воспользуемся разложением решения системы (1) – (5) вдоль луча в ряд в окрестности фронта волны. Для компонент вектора перемещений u_q , ($q = 1, 2, 3$) он начинается с линейных слагаемых

$$u_q = \sum_{m=0}^{\infty} U_q(x_1, x_2, x_3) \frac{[t - \tau(x_1, x_2, x_3)]^{m+1}}{(m+1)!} H[t - \tau(x_1, x_2, x_3)] \quad (q = 1, 2, 3). \quad (12)$$

Здесь $H[t - \tau(x_1, x_2, x_3)]$ – функция Хэвисайда.

При постановке задачи об исследовании поведения волны в малой окрестности фронта в (12) удерживается только один член $m = 0$ и после подстановки (12) в уравнения движения (1) – (3) для вычисления компонент амплитудного вектора U_q^0 получается однородная система уравнений [3]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p U_q^0 - U_i^0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (13)$$

$$U_i^0 = \varphi(x_1, x_2, x_3) A_i^{(r)}(\mathbf{n}, x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (14)$$

где φ – неизвестная функция координат точек фронта. Для нахождения φ используется уравнение [3]

$$2\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \varphi \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\tau} = 0, \quad (15)$$

решение которого имеет вид

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \frac{c_0(\alpha, \beta)}{\sqrt{|J(\alpha, \beta, \tau)|}} \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{c_0(\alpha, \beta)}{\sqrt{|J(\alpha, \beta, \tau)|}} \quad \text{при} \quad \rho = \rho_0, \quad (17)$$

где $c_0(\alpha, \beta)$ – функция, зависящая от исходных данных.

Таким образом, в нулевом приближении лучевого метода для составляющих поля смещений в окрестности фронта волны на основании формул (12), (16), получаются выражения

$$u_q^{(r)} = \frac{c_0(\alpha, \beta) \cdot A_q^{(r)}(\alpha, \beta, \tau)}{\sqrt{|J(\alpha, \beta, \tau)|}} [t - \tau(x_1, x_2, x_3)] H[t - \tau(x_1, x_2, x_3)] \quad (q = 1, 2, 3). \quad (17)$$

Поскольку в однородной породе $A_q^{(r)}(\alpha, \beta, \tau) = A_q^{(r)}(\alpha, \beta, 0)$, то на основании (12), (14), (17) можно записать

$$\dot{i}_q^{(r)}(\alpha, \beta, \tau) = \dot{i}_q^{(r)}(\alpha, \beta, 0) \sqrt{\frac{J(\alpha, \beta, 0)}{J(\alpha, \beta, \tau)}} \quad (q=1,2,3). \quad (18)$$

Это равенство применяется для вычисления величин разрывов соответствующих функций на фронте волны.

Взаимодействие разрывной волны с поверхностью раздела анизотропных упругих пород. При решении задач теории упругости для неоднородных тел, находящихся в контакте по поверхности их раздела G необходимо к уравнениям теории упругости (1) – (3), записываемым отдельно в областях, занимаемых каждым из тел, добавить краевые уравнения на границе раздела. Эти уравнения вытекают из условия непрерывности вектора напряжений на каждой элементарной площадке граничной поверхности при переходе через эту площадку и из условия совместности перемещений обоих тел на площадке. Так, например, для плоской поверхности раздела G ($x_2 = 0$), отделяющей упругое полупространство I ($x_2 < 0$) от полупространства II ($x_2 > 0$), эти условия записываются в виде

$$(\mathbf{u}_{(1)} - \mathbf{u}_{(2)})|_G = 0, \quad (19)$$

$$(\mathbf{y}_{2(1)} + \mathbf{y}_{2(2)})|_G = 0, \quad (20)$$

где $\mathbf{u}_{(1)}, \mathbf{u}_{(2)}$ – векторы перемещений, $\mathbf{y}_{2(1)}, \mathbf{y}_{2(2)}$ – векторы плотности сил, действующих на элементарную площадку $x_2 = \text{const}$ в средах I и II , соответственно.

Достоинства подхода, основанного на лучевой концепции, заключаются в том, что в этом случае рабочей основой методологии являются не сами дифференциальные уравнения движения среды, а некоторые общие и достаточно простые свойства их решений, которые формулируются в виде физических принципов и законов и, по сути, являются интегралами этих уравнений. Поэтому, как отмечено выше, при применении методов лучевой оптики к исследованию распространения ударных волн в упругих средах задача динамической теории упругости распадается на две – кинематическую и динамическую.

Соответственно двум этим задачам рассматриваются также вопросы о взаимодействии ударных волн с поверхностями раздела упругих сред. Вначале выполняется геометрическое построение лучей и фронтов падающей волны и систем формирующихся лучей и фронтов отраженных и преломленных волн, отходящих от

поверхности раздела. Эта процедура реализуется путем решения соответствующих уравнений Снелля [10]. После этого с помощью соотношений (19), (20) производится вычисление напряжений на этих фронтах.

При анализе формирования криволинейных фронтов систем отраженных и преломленных волн, инициированных криволинейным фронтом падающей волны, используется локально плоский подход, в соответствии с которым все поверхности фронтов в малой окрестности точки взаимодействия волн с поверхностью раздела (в том числе и сама разделяющая поверхность) считаются локально плоскими. Он позволяет принять два положения о возбуждении и преломлении плоских волн [3].

Обсуждение результатов. Предложенная теория была использована для исследования явлений отражения и преломления разрывных qP -волн при их взаимодействии с параболическими поверхностями раздела трансверсально изотропных упругих пород со следующими параметрами $\lambda_1 = 5,0 \times 10^{10}$ Па, $\mu_1 = 4,0 \times 10^{10}$ Па, $l_1 = 0,1\lambda_1$, $m_1 = 0,2\mu_1$, $p_1 = 0,4(\lambda_1 + 2\mu_1)$, $\rho_1 = 2,7 \times 10^3$ кг/м³, $\lambda_2 = 3,4 \times 10^9$ Па, $\mu_2 = 1,4 \times 10^{10}$ Па, $l_2 = 0,1\lambda_2$, $m_2 = 0,2\mu_2$, $p_2 = 0,4(\lambda_2 + 2\mu_2)$, $\rho_2 = 2,8 \times 10^3$ кг/м³. При таких соотношениях параметров ось Ox_2 является осью симметрии физических свойств, благодаря чему вдоль нее возможно распространение чисто продольной P -волны и чисто поперечной S -волны. Рассмотрены случаи, когда плоская разрывная P -волна, распространяющаяся в среде I вдоль оси Ox_2 , взаимодействовала с параболическими поверхностями G , образующие сечения которых описываются уравнением

$$x_2 = a \cdot x_1^2 + b.$$

Здесь $a = \pm 5 \cdot 10^{-4}$ м⁻¹, b меняется в зависимости от условий задачи; знак „-” соответствует вогнутой поверхности, знак „+” – выпуклой поверхности.

Если вогнутая параболическая поверхность G является поверхностью сопряжения сред I и II , то явление фокусировки свойственно как отраженным, так и преломленным волнам (рис.1). В данном случае при распространении падающей плоской P -волны в среде I преломленная qP -волна 2 фокусируется, а qS -волна 3 рассеивается (рис.1,а). Если порядок размещения сред изменить на

обратный, то преломленная qP -волна 2 рассеивается, а qS -волна 3 фокусируется (рис.1,б).

Явления преобразования разрывных волн существенно усложняются, если они взаимодействуют с двумя поверхностями раздела, поскольку в этом случае имеют место многократные акты отражения-преломления. Характер преобразования qP -волны двояковыпуклой параболической линзой в зависимости от порядка следования сред I и II представлен на рис.2,а,б. В первом случае линза помещена в среду I и ее материал обладает свойствами среды II , во втором случае порядок чередования сред обратный. Чтобы не загромождать рисунки, здесь показаны лучи и фронты только проникших qP -волн. Как видно, при одних и тех же геометрических параметрах двояковыпуклая линза может быть как собирающей (рис.2,а), так и рассеивающей (рис.2,б).

Одной из разновидностей тектонических аномалий может быть искривление слоя горной породы. В связи с этим важно проанализировать как влияет это искривление на характер преобразования фронта волны при прохождении через него. На рис.3 показаны схемы дифракции разрывных волн на выпуклых (а) и вогнутых (б) параболических искривлениях слоя среды II . Результаты расчетов свидетельствуют, что в общих случаях преломленная qP -волна фокусируется, однако фокусные расстояния при этом оказываются довольно большими.

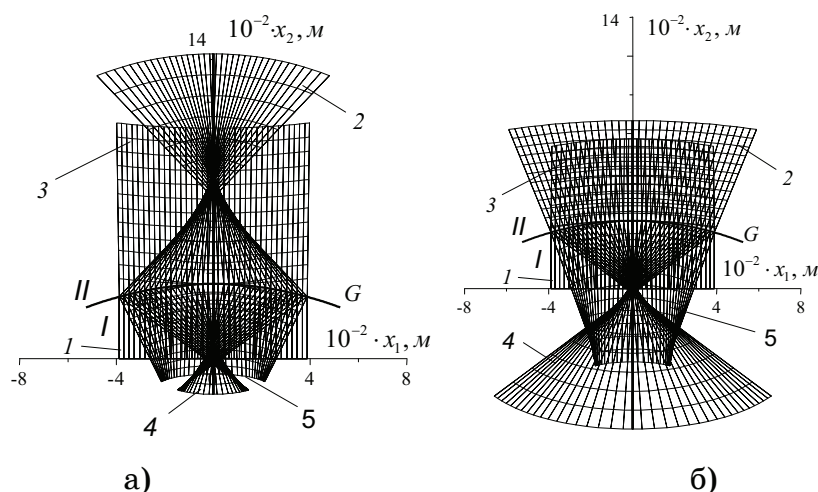


Рисунок 1

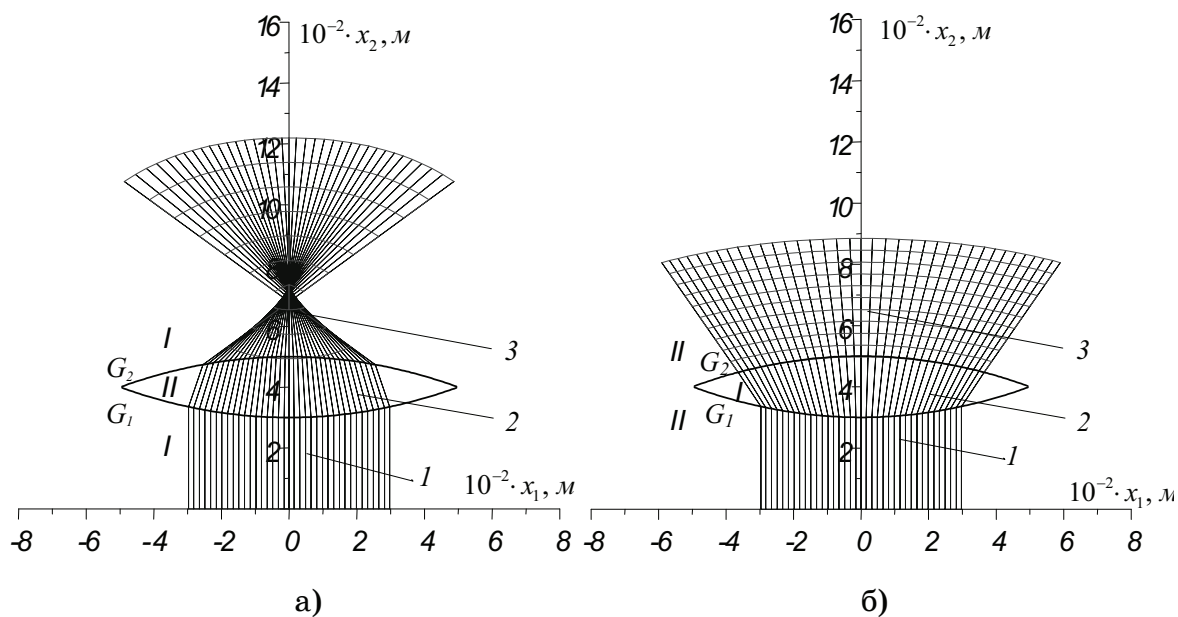


Рисунок 2

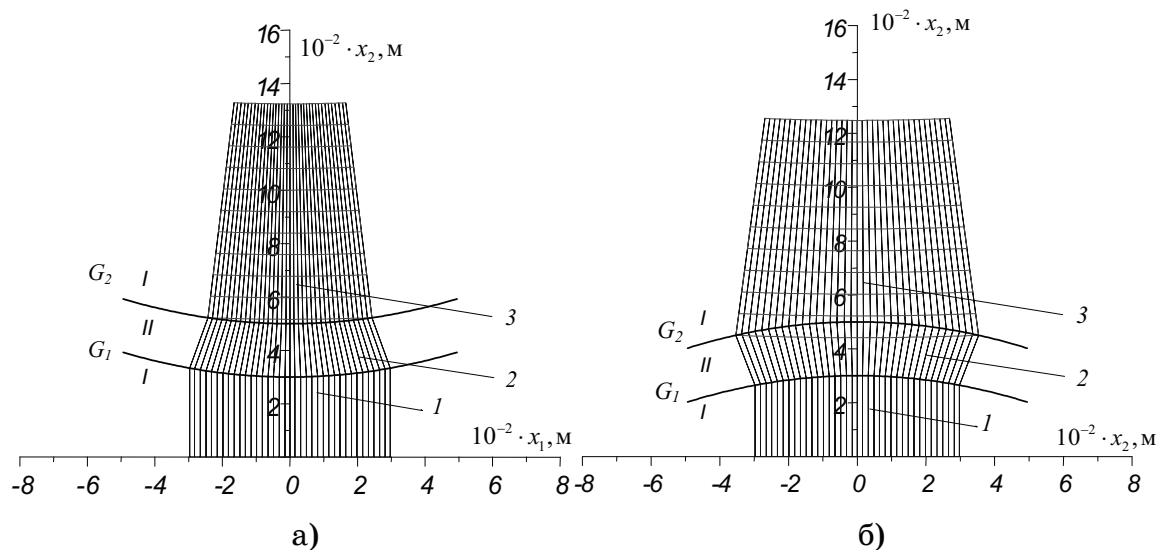


Рисунок 3

Выводы. С помощью разработанной методики построены фронты отраженных от поверхности раздела и проникших через нее разрывных волн напряжений в анизотропных упругих породах, решены задачи о фокусировке и рассеивании таких волн свободными криволинейными поверхностями, поверхностями раздела, упругими линзами и искривленными слоями. Показано, что при одних и тех же геометрических свойствах поверхностей раздела и формах упругих линз их способности фокусировать или рассеивать разрывную волну и тем самым усиливать или ослаблять ее интенсивность, определяется механическими (акустическими) свойствами упругих сред, а также

очередностью их прохождения, что необходимо учитывать при выборе мест для строительных работ на подработанных территориях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. – М.: Мир, 1972. – 183с.
2. Новацкий В.К. Волновые задачи теории пластичности. – М.: Мир, 1978. – 307с.
3. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука, 1980. 280 с.
4. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К.: Наукова думка, 1988. - 220 с.
5. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
6. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Дифракция плоской разрывной волны в слоистой анизотропной упругой среде //Механика композитных материалов. 2003. – №1 –С. 39–52.
7. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Фокусировка и рассеивание плоских ударных волн на поверхности раздела анизотропных упругих сред. //Прикл. механика и техн. физика.– 2002.– Т.43, №5.– С. 21–27.
8. Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media //International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.
9. Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Ivanchenko G.M. Focusing and scattering the nonstationary wave by the free surface of an anisotropic elastic medium // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N7. – P.86-93.
10. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. –2000.– 64, №3.–С. 394–402.
11. Lugovoy P.Z., Gouliaev V.I. Propagation of shock wave fronts in anisotropic layered media. CP505, Shock Compression of Condensed Matter – 1999/ Edited by M.D.Furnish, L.C.Chhabildas and R.S.Nixon //Proceeding of the Conference of the American Physical Society, Snowbird, Utah, USA. – P. 1287-1290.
12. Худек М., Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Лучевые методы в задачах распространения ударных волн в слоистых горных породах // Materialy Naukowe XI Miedzynarodowe Sympozjum GEOTECHNIKA – GEOTECHNICS 2004, Gliwice – Ustron, 19 – 22 pazdziernika 2004. С.29 – 40.
13. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.

Получено __.__.2006 г.