

УДК 517.5

Е.В. Дерещ

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

Пусть H_1^ω - множество 2π -периодических измеримых функций $f(t)$ таких, что $\omega(f, t)_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|h| \leq t} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \omega(t)$, где $\omega(t)$ - заданный модуль непрерывности, $W^r H_1^\omega$ ($r=1,2,\dots$) - множество 2π -периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$ -я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}(t) \in H_1^\omega$.

Обозначим через $A_n(f, t)$ оператор вида $A_n(f, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) u_n(t - \tau) d\tau$,

где $u_n(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^n p_k \cos kt$, $u_n(t) \geq 0$ для всех t .

Для нечетных r и выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ точное значение величины $\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty$ вычислено в [1]. В настоящей работе получено решение этой задачи при $r=2$ и выпуклом модуле непрерывности.

Основные результаты

Теорема. Для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ и линейного положительного полиномиального оператора $A_n(f, t)$

$$\sup_{f \in W^2 H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty = \int_0^\xi \omega'(2t) g(t) dt, \text{ где } g(t) - \text{четная } 2\pi\text{-периодическая}$$

функция, $g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-\pi}^t \int_{-\pi-\pi}^y u_n(\tau) d\tau dy + \lambda$, если $t \in [-\pi, 0)$, величина λ

определяется равенством $\int_{-\pi}^\pi g(t) dt = 0$, $\xi \in (0, \pi)$ - нуль функции $g(t)$.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть $0 < h < \pi$, $-h < t_1 < \dots < t_k < \pi - h$. Тогда для любой четной 2π -периодической функции $f \in L_1$ справедливо неравенство

$$\int_0^h f(t)dt - \int_{\pi-h}^{\pi} f(t)dt \leq \frac{1}{4} \omega(f, 2h)_1 \quad (1)$$

$$\int_0^h f(t)dt - \int_{\pi-h}^{\pi} f(t)dt \leq \frac{1}{4} \omega(f, 2h)_1 + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \int_{t_i}^{t_i+2h} f(t)dt - (1 - (-1)^k) \int_{\pi-h}^{\pi} f(t)dt \quad (2)$$

Лемма 1 является следствием леммы 1 в [1].

Доказательство теоремы. Интегрируя по частям, нетрудно получить известное равенство $\sup_{f \in W^2 H_1^0} \|f - A_n(f)\|_{\infty} = \sup_{f \in W^2 H_1^0} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt \right|$.

Определим 2π -периодическую четную функцию $f(u_n, \omega, t)$ равенством

$$f(u_n, \omega, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega'(2t), & \text{если } t \in (0, \xi], \\ 0, & \text{если } t \in (\xi, \pi] \end{cases}$$

Поскольку $f(u_n, \omega, t) \in H_1^0$, доказательство теоремы сводится к доказательству неравенства

$$\int_0^{2\pi} g(t)f(t)dt \leq \int_0^{2\pi} g(t)f(u_n, \omega, t)dt \quad (3)$$

для любой функции $f(t) \in H_1^0$, при этом, не ограничивая общности, можно считать, что $f(t)$ - четная 2π -периодическая функция, равная в среднем 0 и абсолютно непрерывная на $[0, \pi]$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что существуют точки

$c_1, c_2, c_3 \in (0, \pi)$ такие, что $f(c_1) < f(c_2)$ и $\int_0^{c_3} f(\tau)d\tau > 0$, так как в противном

случае (3) очевидно. Интегрируя по частям и учитывая свойства функции $g(t)$, получаем оценку

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \leq 2 \int_0^{\xi} g'(t) \left(\int_0^t f(y)dy - \int_{\pi-t}^{\pi} f(y)dy \right) dt + 2 \int_Q g'(\pi-t) \left(S(t) - \int_0^t f(y)dy \right) dt \quad (4)$$

$$\text{где } S(t) = \frac{2(\pi-t)}{\pi} \sup_{0 \leq x \leq \pi/2 \leq z \leq \pi} \left((z - \pi/2) \int_0^t f(y)dy + (\pi/2 - x) \int_0^z f(y)dy \right) / (z - x),$$

$$W = \left\{ t \in [0, \pi] : \int_0^t f(y) dy < S(t) \right\}, \quad Q = W \cap (\pi - \xi, \pi]. \quad \text{Если } Q = \emptyset, \text{ то (3)}$$

следует из (4) и (1). Предположим, что множество Q не пусто и существуют точки $\zeta' \in [\pi/2, \pi - \xi]$, $\zeta'' \in (\pi - \xi, \pi)$ такие, что $\zeta' \notin W$, $\zeta'' \notin W$ и $(\zeta', \zeta'') \subset W$, тогда (4) можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \leq 2 \int_0^\xi |g'(t)| \left(\int_0^t f(y)dy - \int_{\pi-t}^\pi f(y)dy \right) dt + 2 \sum_{i \in T} \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'(\pi-t)| \delta(t) dt + 2 \int_{\pi-\xi}^{\zeta''} |g'(\pi-t)| \delta(t) dt \quad (5)$$

где $\delta(t) = S(t) - \int_0^t f(y)dy$, T - конечное или счетное множество,

$Q = \bigcup_{i \in T} (\tau_i', \tau_i'')$, $(\tau_i', \tau_i'') \cap (\tau_j', \tau_j'') = \emptyset$, если $i \neq j$. При каждом $t \in [0, \xi]$ оценим

сверху первое слагаемое в (5) с помощью леммы 1, включая в совокупность промежутков интегрирования $[\tau_i', \tau_i' + 2t]$ и $[\tau_i'' - 2t, \tau_i'']$, если $\tau_i'' - \tau_i' \geq 2t$; $[\tau_j', \tau_j' + 2t]$, если $\tau_j' < \pi - t \leq (\tau_j' + \tau_j'')/2$; $[2\pi - 2t - \tau_j'', 2\pi - \tau_j'']$, если $(\tau_j' + \tau_j'')/2 < \pi - t < \tau_j''$; $[\zeta', \zeta' + 2t]$ и $[\zeta'' - 2t, \zeta'']$, если $\zeta'' - \zeta' \geq 2t$; $[\zeta', \zeta' + 2t]$, если $\zeta' < \pi - t \leq (\zeta' + \zeta'')/2$; $[2\pi - 2t - \zeta'', 2\pi - \zeta'']$, если $(\zeta' + \zeta'')/2 < \pi - t < \zeta''$; наконец, если при некотором t не было выбрано ни одного промежутка, то для таких t применим оценку (1). Выбирая в полученных интегралах в качестве новой переменной аргумент функции $\delta(t)$ и принимая во внимание монотонность функции $g'(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt &\leq \int_0^\xi g(t)\omega'(2t)dt + 2 \sum_{i \in T} \left(\int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'(\pi-t)| \delta(t) dt - \frac{1}{2} \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'((t-\tau_i')/2)| \delta(t) dt \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'((\tau_i''-t)/2)| \delta(t) dt - 2 \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'(\pi-t)| \delta(t) dt + \frac{1}{2} \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'(\pi-\tau_i''/2-t/2)| \delta(t) dt + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'(\pi-\tau_i'/2-t/2)| \delta(t) dt \right) + 2 \int_{\pi-\xi}^{\zeta''} |g'(\pi-t)| \delta(t) dt + \\ &\quad + 2 \int_{\pi-\zeta''}^\xi |g'(t)| (\delta(\mu(t)) - 2\delta(\pi-t)) dt - 2 \int_0^{\min\{\xi, (\zeta''-\zeta')/2\}} |g'(t)| (\delta(\zeta'+2t) + \delta(\zeta''-2t)) dt \leq \\ &\leq \int_0^\xi g(t)\omega'(2t)dt \end{aligned}$$

$$\text{где } \mu(t) = \begin{cases} 2\pi - 2t - \zeta'', & \text{если } \pi - t \in ((\zeta' + \zeta'')/2, \zeta''] \\ 2\pi - 2t - \zeta', & \text{если } \pi - t \in [\zeta', (\zeta' + \zeta'')/2] \end{cases}$$

Остаётся рассмотреть случай, когда $Q \neq \emptyset$, но при этом не существует точек ζ' , ζ'' с указанными свойствами. Нетрудно показать, что при этом имеет место один из двух случаев:

Существуют такие точки α и β , что $0 \leq \alpha < \pi/2$, $\pi - \xi < \beta < \pi$,

$$\int_0^t f(y) dy < \int_0^\alpha f(y) dy + \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(y) dy \text{ для всех } t \in (\alpha, \beta) \text{ и } \int_0^t f(y) dy < S(t) \text{ для всех } t \in [\pi/2, \pi - \xi]$$

$$\text{Существует точка } d \in (0, \pi - \xi), \text{ такая, что } S(d) = \int_0^d f(y) dy \text{ и } S(t) > \int_0^t f(y) dy \text{ для всех } t \in (d, \pi)$$

В случае (I), как и ранее, оценим величину $\int_0^t f(y) dy - \int_{\pi-t}^\pi f(y) dy$ сверху с помощью леммы 1, при этом промежутки интегрирования выбираются аналогично описанному выше, с той разницей, что вместо ζ' , ζ'' выбираются точки α и β соответственно, вместо множества $\bigcup_{i \in T} (\tau'_i, \tau''_i)$ следует взять множество $\bigcup_{i \in L} (\gamma'_i, \gamma''_i) = Q \cap [\beta, \pi]$ с аналогичными свойствами, кроме того, при каждом t промежутки, пересекающие точку π и отличные от $[\pi - t, \pi + t]$, включаются в знакопеременяющуюся сумму интегралов только тогда, когда

$$\int_0^{\pi-t} f(y) dy \leq S(\pi - t). \text{ В результате при } t \leq \pi - \beta \text{ получаем оценку}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t) dt - \int_{\pi-t}^\pi f(t) dt &\leq \frac{1}{4} \omega(2t) - \sum_{i \in L} (\delta(\gamma'_i + 2t) + \delta(\gamma''_i - 2t)) - \\ &- \left(\int_0^\alpha f(y) dy + \frac{\beta}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(y) dy - \int_0^{\alpha+2t} f(y) dy - \int_0^{\beta-2t} f(y) dy \right) \cdot \left[\frac{\beta - \alpha}{2} - t \right]_+, \end{aligned} \quad (6)$$

при $\max\{(\alpha + \beta)/2, \pi - \xi\} \leq \pi - t < \beta$ получаем неравенство

$$\int_0^t f(t)dt - \int_{\pi-t}^{\pi} f(t)dt \leq \frac{1}{4} \omega(2t) + (\delta(2\pi - 2t - \beta) - 2\delta(\pi - t) + \delta(\beta))[\delta(\pi - t)]_+ -$$

$$- \left(\int_0^{\alpha} f(y)dy + \frac{\beta}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(y)dy - \int_0^{\alpha+2t} f(y)dy - \int_0^{\beta-2t} f(y)dy \right) \cdot \left[\frac{\beta - \alpha}{2} - t \right]_+$$
(7)

а при $\pi - \xi \leq \pi - t < (\alpha + \beta)/2$ приходим к неравенству

$$\int_0^t f(t)dt - \int_{\pi-t}^{\pi} f(t)dt \leq \frac{1}{4} \omega(2t) + (\delta(2\pi - 2t - \alpha) - 2\delta(\pi - t) + \delta(\alpha))[\delta(\pi - t)]_+ \quad (8)$$

Из (4), (6)-(8) и монотонности $g'(t)$ после преобразований получаем (3).

В условиях (II) для доказательства теоремы достаточно при каждом $t \in (0, \xi]$ применить лемму 1, полагая $h = t$, $k = 1$, $t_1 = d$.

Теорема полностью доказана.

Выводы

В настоящей работе найдена погрешность приближения класса $W^r H_1^\omega$ линейными положительными полиномиальными операторами при $r = 2$ и любом выпуклом модуле непрерывности $\omega(t)$. При любом r решение такой задачи сводится к вычислению $\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, где функция $g(t)$ определяется ядром оператора. При этом при чётных r отсутствие симметрии функции $g(t)$ значительно усложняет задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доронин В. Г., Лигун А. А. О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности // Докл. АН СССР.-1980.-251, №1.-с. 16-19.

Получено __.__.2006 г.