УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Є.М. Борисов, Ю.П. Глухов

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КОМПЛЕКСНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ У ЗАДАЧІ ПРО ПОШИРЕННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ РЕЛЕЯ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Під поверхневими гармонічними хвилями у пружних тілах з початковими напруженнями будемо розуміти гармонічні хвилі, які поширюються вздовж вільної поверхні і їхні амплітудні величини згасають при віддаленні від вільної поверхні (ця умова тотожна умовам лінійної класичної теорії пружності). Крім цього у випадку відсутності початкових напружень, розглядувані поверхневі хвилі мають переходити у поверхневі хвилі класичної лінійної теорії пружності.

Зауважимо, що значно раніше такі задачі були розв’язані іншими методами, наприклад, в роботі [1]. Дослідження даної задачі виконаємо у загальній формі для стисливих і нестисливих тіл при довільній структурі пружного потенціалу окремо для нерівних і рівних коренів основного (характеристичного) рівняння.

Нерівні корені. У цьому випадку на границі півплощини дістанемо граничні умови [2, 3]

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{22} &\equiv 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1'(z_1)+\Phi_2'(z_2)\right]=0; \\ \overline{Q}_{21} &\equiv -2\operatorname{Re}\left[\mu_1\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(z_1)+\mu_2\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(z_2)\right]=0 \end{aligned} \tag{1}$$

Система однорідних рівнянь (1) відносно невідомих комплексних потенціалів Φ_1' і Φ_2' має нетривіальний розв’язок, коли визначник другого порядку дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1\gamma_{21}^{(1)} & \mu_2\gamma_{21}^{(2)} \end{vmatrix} = 0 . \tag{2}$$

Отже, з умови існування ненульових розв’язків системи (1), тобто з (2), дістанемо рівняння для визначення швидкості хвиль Релея у вигляді

$$\mu_2\gamma_{21}^{(2)}-\mu_1\gamma_{21}^{(1)}=0 , \tag{3}$$

де величини μ_j, $\gamma_{21}^{(j)}$ знаходяться із [3-6]. Рівняння (3) в теорії хвиль називають дисперсійним [1]. Зауважимо, що рівняння (3) збігається з рівнянням, що відповідає поверхневій нестійкості півплощини з початковими напруженнями [4].

 ISSN 1562-9945

Рівні корені. З [3, 4] на границі півплощини при y_2=0 дістанемо такі граничні умови:

$$\overline{Q}_{22} \equiv \mathrm{Re}\left\{ \left[\psi(z_1) + \overline{z}_1 \Phi'(z_1)\right] + \gamma_{22}^{(1)} \Phi(z_1) \right\} = 0;$$
$$\overline{Q}_{21} \equiv \mathrm{Re}\left\{ \mu_1 \gamma_{21}^{(1)} \left[\psi(z_1) + \overline{z}_1 \Phi'(z_1)\right] + \gamma_{21}^{(2)} \Phi(z_1) \right\} = 0. \tag{4}$$

Система однорідних рівнянь (4) щодо невідомих комплексних потенціалів $\psi(z_1)$, $\Phi(z_1)$ має нетривіальний розв’язок, коли для визначника другого порядку виконується умова

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma_{22}^{(1)} \\ \mu_1 \gamma_{21}^{(1)} & \gamma_{22}^{(2)} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Отже, з умови існування ненульових розв’язків системи (4), тобто з (5), дістаємо рівняння для визначення швидкості хвиль Релея у формі

$$\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1 \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} = 0\,, \tag{6}$$

де $\mu_1,\ \gamma_{(ij)}^{(k)}$ визначаються із [4]. Дисперсійне рівняння (6) збігається з рівнянням [4] і відповідає поверхневій нестійкості півплощини з початковими напруженнями при рівних коренях.

Розглянемо приклад для потенціалу Трелоара (тіло неогуківського типу) [4]. Комплексні параметри μ_j не збігаються і визначаються з таких виразів [4]:

$$\mu_1 = i,\ \ \mu_2 = i\lambda_1\lambda_2^{-1}\sqrt{1-\varepsilon_2^2\lambda_1^{-2}} \equiv i\lambda_1\lambda_2^{-1}\sqrt{1-v^2 C_{Sy_2}^{-2}}\,; \tag{7}$$
$$\varepsilon_2 = \frac{v}{C_S^0},\ \ C_S^{0\,2} = \frac{2C_{10}}{\rho},\ C_{Sy_2} = \lambda_1 C_S^0,$$

де C_S^0- швидкість хвилі зсуву (поперечної хвилі) у незавантаженому тілі (без початкових напружень), одержана з урахуванням таких виразів:

$$2C_{10} = \mu;\ \ \mu = \frac{E}{3};\ \nu = 0{,}5\ , \tag{8}$$

μ- коефіцієнт Ламе; ν- коефіцієнт Пуассона, E- модуль пружності; C_{Sy_2} - швидкість хвилі зсуву, яка поляризована в площині y_1Oy_2 і поширюється вздовж осі Oy_1 в тілі з початковими напруженнями [1]; C_{10}- стала, що входить у вигляді множника у вираз для пружного потенціалу. Врахувавши (7) і (8) з рівняння (3), після ряду перетворень дістанемо [4]:

$$\mu_1\gamma_{21}^{(1)} - \mu_2\gamma_{21}^{(2)} = -\frac{i}{2}\frac{(x^3 + x^2 + 3x \;\; -1)(x-1)}{x(1+x^2)} = 0; \tag{9}$$

$$\mathrm{x} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{1 \quad \frac{\varepsilon_2^2}{\lambda_1^2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{1 \quad \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{C}_{\mathrm{Sy2}}^2}},$$

де v- швидкість поверхневих хвиль Релея. Інші позначення співпадають з (7) і (8). У даній праці обмежимося розглядом дозвукових рухів, тобто вважаємо, що $\mathrm{v} < \mathrm{C}_{\mathrm{Sy2}}$. Тоді, врахувавши останнє обмеження, з рівняння (9) дістаємо тільки одне рівняння, кореням якого можна дати фізичну інтерпретацію:

$$x^3 + x^2 + 3x \;\; -1 = 0\,. \tag{10}$$

Рівняння (10) збігається з відповідним рівнянням у [1]. Крім цього, воно відповідає рівнянню [4] для поверхневої нестійкості півплощини з початковими напруженнями для потенціалу Трелоара. Позначимо через x^* додатний дійсний корінь рівняння (10). Тоді із другого виразу (9) маємо

$$v^{*2} = C_R^2 = C_{Sy_2}^2(1 \;\; x^*\lambda_2^2\lambda_1^2) = \lambda_1^2 C_S^{0^2}(1 \;\; x^*\lambda_2^2\lambda_1^2) \tag{11}$$

Вираз (11) визначає швидкість хвиль Релея у неогуківському тілі (півплощині) з початковими напруженнями.

Якщо початковий стан також визначається для плоскої деформації $(\lambda_3 = 1)$, то з (11) із врахуванням $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ знаходимо

$$v^{*2} = C_R^2 = C_{Sy_2}^2(1 \;\; x^*\lambda_1^4). \tag{12}$$

Результати (10)-(12) збігаються із відомими результатами, одержаними іншим методом [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г. Гуща О.И. Введение в акустоупругость. –Киев: Наук. думка, 1977.-152с.
2. Бабич С.Ю., Гузь А.Н. Комплексные потенциалы плоской динамической задачи для сжимаемых упругих тел с начальными напряжениями // Прикл. механика.-1981.-Т.17, №7.-с. 75-83.
3. Гузь А.Н., Бабич С.Ю. Плоские динамические задачи для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями // Прикл. математика и механика.-1982.-Т.46, №2.-с. 263-271.
4. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями.-К.:Наук.думка,1983.-296 с.

 ISSN 1562-9945

5. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии.- К.: Наук. думка, 1990.-630 с.
6. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.В. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями.-К.:Вища школа,1995.-304 с.

Получено __.__.2006 г.