УДК 519.633.2

А.Б. Кулик

ВЕКТОРНІ ЛІНІЇ В ПОРОЖНИНІ ПРЯМОКУТНОЇ ФОРМИ

Актуальність теми. Однією з актуальних задач сучасної гідромеханіки є задача про хвильовий рух твердого деформованого тіла з порожниною, частково заповненою рідиною. Такі задачі виникають у зв’язку з вивченням нестійкої потенціальної течії нев’язкої нестискуваної рідини, яка має вільну поверхню в постійному гравітаційному полі [1-4]. Коливання вільної поверхні рідини можуть бути дуже небезпечними при реалізації стійких режимів руху. Тому на практиці широке розповсюдження отримали різного роду конструктивні пристрої, зокрема у вигляді жорстких та пружних ребер−перегородок, які зменшують вплив шкідливих коливальних явищ вільної поверхні рідини.

Метою даної роботи є знаходження ліній, які характеризуються тим, що для довільного моменту часу t дотична до цих ліній в будь − якій точці співпадає за напрямом зі швидкістю.

Векторні лінії в порожнині без перегородок. Розглянемо спочатку випадок, коли ребра відсутні.

Нехай $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi\}$, Γ -границя.

$\Gamma_0 = \{(x,y): 0 \le x \le 2\pi,\ y = 2\pi\}$, $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$.

Потенціал $\Phi(x,y)$ є розв’язком наступної крайової задачі

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \quad \text{в}\ \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = 0 \\ \left.\Phi\right|_{\Gamma_0} = u \end{cases} \tag{1}$$

В цьому випадку можна знайти ряд частинних розв’язків системи **(1)**

$$\Phi_n(x,y) = c_n \cosh\frac{n}{2}y \cos\frac{n}{2}x,$$

де

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\frac{\cos\frac{n}{2}\xi}{\cosh n\pi}\,d\xi.$$

Покажемо, що лінії струму для задачі (1) мають вигляд:

$$\sin\frac{n}{2}x\sinh\frac{n}{2}y=C\,, \tag{2}$$

де C – довільна константа.

Для цього визначимо проекції швидкості за формулами

$$v_x=\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}=-\frac{n}{2}c_n\cosh\frac{n}{2}y\sin\frac{n}{2}x$$

$$v_y=\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}=\frac{n}{2}c_n\sinh\frac{n}{2}y\cos\frac{n}{2}x$$

Запишемо диференціальне рівняння лінії струму

$$\frac{dx}{-\frac{n}{2}c_n\cosh\frac{n}{2}y\sin\frac{n}{2}x}=\frac{dy}{\frac{n}{2}c_n\sinh\frac{n}{2}y\cos\frac{n}{2}x}.$$

Змінні розділяються

$$\frac{\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{n}{2}y}dx+\frac{\cosh\frac{n}{2}y}{\sinh\frac{n}{2}y}dy=0\,,$$

і рівняння легко інтегрується

$$\frac{2}{n}\ln\left|\sin\frac{n}{2}x\right|+\frac{2}{n}\ln\left|\sinh\frac{n}{2}y\right|=C'.$$

Таким чином, перетворюючи останнє рівняння, отримаємо (2).

Зокрема, для першого частинного розв’язку криві (2) мають вигляд:

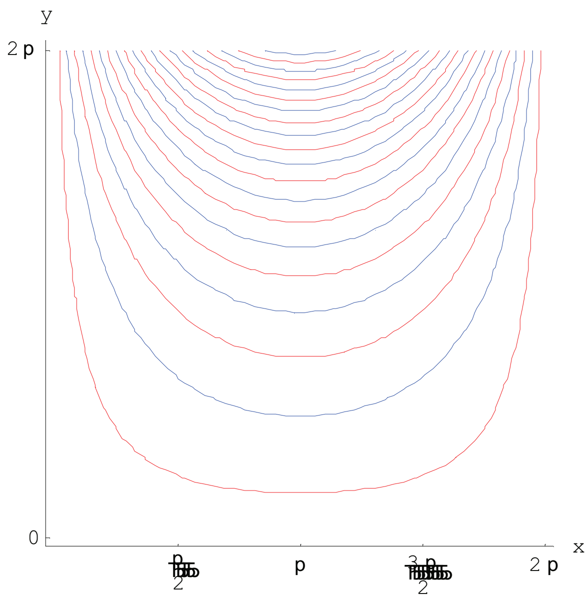

Рисунок 1

Векторні лінії в порожнині з ребрами. Розглянемо прямокутник з поздовжніми ребрами довжини *a*, встановленими на висоті $y = 2\pi$ з обох сторін висотою 4π. Задачу (1) потрібно розглядати в наступній області $\Omega^{(a)} = \{(x, y) : 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 4\pi\}$ з границею Γ та з двома ребрами довжини *a*, встановлених на висоті $y = 2\pi$.

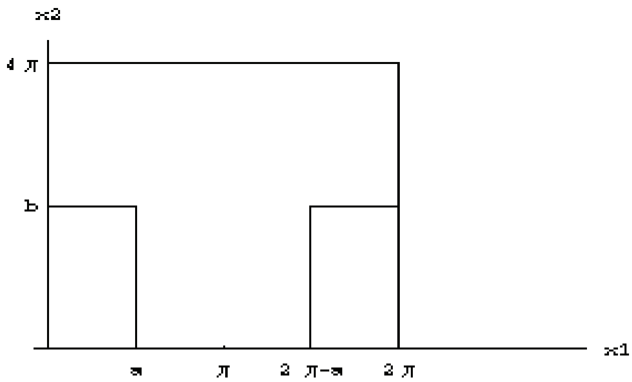

Рисунок 2

Визначимо $\Gamma_0 = \{(x, y)\ : 0 \le x \le 2\pi\ ,\ y = 4\pi\}$,

$\Omega_1 = \{(x, y)\ : 0 \le x \le 2\pi\ ,\ 2\pi \le y \le 4\pi\}$, $\Omega_2 = \{x = (x, y)\ : 0 \le x \le 2\pi\ ,\ 0 \le y \le 2\pi\}$ і нехай $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ наступні відрізки $\gamma_1 = \{(x, y):\ \ 0 \le x \le a,\ y = 2\pi\}$,

$\gamma_2 = \{(x, y):\ \ 2\pi - a \le x \le 2\pi,\ y = 2\pi\}$, $\gamma = \{(x, y):\ \ a \le x \le 2\pi - a,\ y = 2\pi\}$.

Ми визначимо невідому функцію $\varphi(x)$ як нормальну похідну потенціалу на γ. Тоді на $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma$ нормальна похідна від Φ є визначеною і

$$\varphi(x) = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{y=2\pi} = \begin{cases} 0,\ x \in \gamma_1 \cup \gamma_2, \\ \varphi(x),\ x \in \gamma. \end{cases}$$

Зауважимо, що потенціал Φ є розв’язком наступної граничної задачі

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 0, \quad x \in \Omega^{(a)} \setminus \gamma_1 \cup \gamma_2, \\ \Phi(x) = u(x), \quad x \in \Gamma_0, \quad \dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 \cup \gamma. \end{cases} \tag{3}$$

Частинні розв’язки потенціалу $\Phi(x, y)$ в областях Ω_1 і Ω_2 будуть мати вигляд:

$$\Phi_n = \left[a_n \cosh n\left(\pi - \frac{y}{2}\right) + b_n \sinh n\left(2\pi - \frac{y}{2}\right)\right] \cos\frac{n}{2}x \ \text{ в } \Omega_1 \tag{4}$$

$$\Phi_n = c_n \cosh\frac{n}{2} y \cos\frac{n}{2} x \ \text{ в } \ \Omega_2, \tag{5}$$

ISSN 1562-9945

де

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\frac{\cos\frac{n}{2}\xi}{\cosh n\pi}d\xi\,, \tag{6}$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\xi)\frac{\mathrm{T}_n\left(\cos\frac{a}{2}\cos\xi\right)}{n\cosh n\pi}d\xi\,, \tag{7}$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\xi)\frac{\mathrm{T}_n\left(\cos\frac{a}{2}\cos\xi\right)}{n\sinh n\pi}d\xi\,,$$

$$\psi(\tau) = 2\tilde{\varphi}(2\arccos(\cos\frac{a}{2}\cos\tau))\,,\;\; \varphi(\xi) = \sqrt{\frac{1-\cos^2\frac{\xi}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{\xi}{2}}}\tilde{\varphi}(\xi)\,.$$

Алгоритм знаходження зв'язку між ψ і u описаний в [5].

Неважко переконатися, що лінії струму для функції $\Phi(x,y)$ в області Ω_2 співпадають з (2). Знайдемо вигляд векторних ліній в області Ω_1. Для цього знайдемо частинні похідні для функції $\Phi(x,y)$ в рівнянні (4).

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \left[a_n\cosh n\left(\pi-\frac{y}{2}\right)+b_n\sinh n\left(2\pi-\frac{y}{2}\right)\right]\left(-\sin\frac{n}{2}x\right)\frac{n}{2},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \left[-\frac{n}{2}a_n\sinh n\left(\pi-\frac{y}{2}\right)-\frac{n}{2}b_n\cosh n\left(2\pi-\frac{y}{2}\right)\right]\cos\frac{n}{2}x\,.$$

Запишимо диференціальне рівняння для ліній струму

$$\frac{dx}{\left[a_n\cosh n\left(\pi-\frac{y}{2}\right)+b_n\sinh n\left(2\pi-\frac{y}{2}\right)\right]\left(-\sin\frac{n}{2}x\right)\frac{n}{2}} =$$

$$= \frac{dy}{\left[-\frac{n}{2}a_n\sinh n\left(\pi-\frac{y}{2}\right)-\frac{n}{2}b_n\cosh n\left(2\pi-\frac{y}{2}\right)\right]\cos\frac{n}{2}x}$$

Відокремлюючи змінні, одержимо:

$$\frac{\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{n}{2}x}dx = \frac{a_n\cosh n\left(\pi-\frac{y}{2}\right)+b_n\sinh n\left(2\pi-\frac{y}{2}\right)}{a_n\sinh n\left(\pi-\frac{y}{2}\right)+b_n\cosh n\left(2\pi-\frac{y}{2}\right)}dy$$

Інтегруючи останнє рівняння, матимемо:

$$\frac{2}{n}\ln\left|\sin\frac{nx}{2}\right|+$$

$$+\frac{2}{n}\ln\left|\left(a_n\sinh n\pi+b_n\cosh 2n\pi\right)\cosh\frac{ny}{2}-\left(a_n\cosh n\pi+b_n\sinh 2n\pi\right)\sinh\frac{ny}{2}\right|=$$

$$=\frac{2}{n}\ln C\,.$$

Ця рівність легко перетворюється в наступну:

$$\sin\frac{nx}{2}\left[\left(a_n\sinh n\pi+b_n\cosh 2n\pi\right)\cosh\frac{ny}{2}-\left(a_n\cosh n\pi+b_n\sinh 2n\pi\right)\sinh\frac{ny}{2}\right]=C$$

або

$$\sin\frac{nx}{2}\left[a_n\sinh n\left(\pi-\frac{y}{2}\right)+b_n\cosh n\left(2\pi-\frac{y}{2}\right)\right]=C$$

Таким чином,

Теорема: Векторні лінії для задачі (3) мають вигляд

$$\sin\frac{nx}{2}\left[a_n\sinh n\left(\pi-\frac{y}{2}\right)+b_n\cosh n\left(2\pi-\frac{y}{2}\right)\right]=C_1 \text{ в області } \Omega_1,$$

$$\sin\frac{nx}{2}\sinh\frac{ny}{2}=C_2 \text{ в області } \Omega_2,$$

де a_n, b_n визначаються відповідно з (6), (7), C_1, C_2 -довільні сталі.

Ці лінії не змінюються з часом, і вони є траєкторіями частинок рідини.

На Рис 3. проілюстровано сімейство кривих для задачі (3) для першого частинного розв’язку.

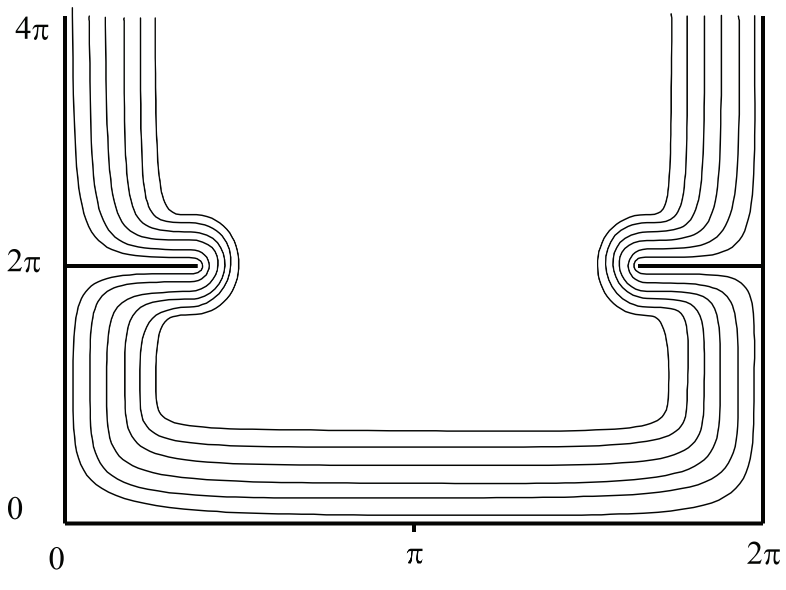

Рисунок 3

ЛІТЕРАТУРА

1. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость –К.: Наукова думка, 1990. –296с.
2. Кочин Н.Е., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика –М.: Мир, 1961. – 534с.
3. И.Б. Богоряд, Г.З. Дружинина О демпфировании колебаний вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде с кольцевым ребром. –Прикладная механика, Т.21, №2, 1985 с.126-128
4. Д.А. Галицын, В.А. Троценко Определение частот и присоединенных масс жидкости в подвижной полости в форме прямоугольного параллелепипеда с перегородками. –Механика твердого тела. №2, 2001 с.175-191.
5. Gavrilyuk I.P., Kulyk A.B., Makarov V.L. Integral equations of the linear sloshing in an infinite chute and their discretization// Computational methods in applied mathematics –2001. #1. pp. 39-61.

Получено __.__.2006 г.