УДК 539.3

К.І.Шнеренко, В.Ф.Годзула, А.С.Богатирчук

ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ НАВКОЛО ОТВОРУ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПАНЕЛІ ІЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ

1. Постановка задачі. Розглянемо напружений стан непологої циліндричної панелі із композитного матеріалу, виготовленої перетином поверхні циліндричної оболонки двома одноосними круговими циліндричними поверхнями радіусів r_{10} і r_{20}. Внутрішній контур панелі жорстко защемлений, а зовнішній - навантажений розтягуючими зусиллями T.

Віднесемо серединну поверхню панелі до системи криволінійних ортогональних координат (α,β). В подальшому виходимо з варіаційного рівняння Лагранжа [1].

$$\iint_{\Omega}\left\{\delta V_0-\left(p_1\delta u_1+p_2\delta u_2+p_n\delta w+m_1\delta\gamma_1+m_2\delta\gamma_2\right)\right\}A_1A_2\,d\alpha d\beta-$$

$$-\int_{\Gamma_1}\left(T_{tt}^0\delta u_t+T_{ts}^0\delta u_s+T_{th}^0\delta w+G_{tt}^0\delta\gamma_t+G_{ts}^0\delta\gamma_s\right)d\Gamma=0, \tag{1}$$

$$\delta V=T_1\delta\varepsilon_1+T_2\delta\varepsilon_2+S_{12}\delta\delta_{12}+G_1\delta k_1+G_2\delta k_2+2H_{12}\delta k_{12}+Q_1\delta\varepsilon_{13}+Q_2\delta\varepsilon_{23},$$

де V_0- питома енергія деформації; $u_1,u_2,w,\gamma_1,\gamma_2$ - узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки, через які виражається поле переміщень

$$U_1=u_1(\alpha,\beta)+z\gamma_1(\alpha,\beta),$$

$$U_2=u_2(\alpha,\beta)+z\gamma_2(\alpha,\beta),\ (-h/2\le z\le h/2),\quad W=w(\alpha,\beta). \tag{2}$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій і узагальненими переміщеннями мають вигляд[1]

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+k_\alpha w,\qquad \begin{pmatrix}1,\alpha,A,u\\2,\beta,B,v\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)-2k_{\alpha\beta}w,$$

$$\varepsilon_{13}=\gamma_1+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\delta\left(-k_\alpha u+k_{\alpha\beta}v\right),\begin{pmatrix}1,\alpha,A,u\\2,\beta,B,v\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\chi_1=\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha}+\frac{\gamma_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta},\qquad \begin{pmatrix}1,\alpha,A\\2,\beta,B\end{pmatrix},\qquad 2\chi_{12}=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\gamma_1}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\gamma_2}{B}\right).$$

Співвідношення пружності для композитної оболонки будуть:

$$T_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\varepsilon_{12}\,, \quad (1 \leftrightarrow 2)\,,\; S_{12} = B_{13}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{33}\varepsilon_{12}\,,$$
$$G_1 = D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{13}2\chi_{12}\,,\; (1 \leftrightarrow 2)\,, \tag{4}$$
$$H_{12} = D_{13}\chi_1 + D_{23}\chi_2 + D_{33}2\chi_{12}\,, \quad Q_1 = K_1\varepsilon_{13}\,, \quad (1 \leftrightarrow 2)\,.$$

Тут B_{ij}, D_{ij}, K_i - узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Граничні умови на жорстко защемленому контурі при $\rho = r_{10}$ будуть [1]:

$$u = v = w = \gamma_\rho = \gamma_\theta = 0. \tag{5}$$

На зовнішньому контурі панелі при $\rho = r_{20}$

$$T_\rho = T|\sin\theta|, S_{\rho\theta} = Q_\rho = G_\rho = H_{\rho\theta} = 0. \tag{6}$$

Граничні умови (6) змінюються по гармонійному закону та відповідають розтягуючому зусиллю T, що діє вздовж координати ρ.

Підставивши (3) в (4), а останнє – в (1) з урахуванням (5,6), отримаємо варіаційне рівняння відносно змінних $u, v, w, \gamma_1, \gamma_2$:

$$I(u, v,\ w,\ \gamma_1,\ \gamma_2) = 0.$$

2. **Метод розв'язку задачі.** Для розв'язку задачі застосуємо метод скінчених елементів. Розбиваємо область на квадратичні ізопараметричні елементи, що мають по вісім вузлів. На кожному з цих елементів вводимо локальну систему координат (x_1, x_2) таку, що $|x_1| \le 1,\ |x_2| \le 1$. При цьому перетворення від локальних координат до глобальних здійснюється за допомогою функцій форми

$$\varphi_i = \frac{1}{4}(1 + x_{10})(1 + x_{20})(x_{10} + x_{20} - 1) \;\; (i = 1,3,5,7);$$
$$\varphi_i = \frac{1}{2}(1 - x_1^2)(1 + x_{20}) \quad (i = 2,6); \quad \varphi_i = \frac{1}{2}(1 + x_{10})(1 - x_2^2) \quad (i = 4,8) \tag{7}$$

співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^{8}\alpha^i\varphi_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{8}\beta^i\varphi_{i,} \tag{8}$$

де $x_{10} = x_1x_{1i},\ x_{20} = x_2x_{2i},\ (x_{1i}, x_{2i}),\ (\alpha^i, \beta^i)$ - координати i-го вузла відповідно в локальній і глобальній системах координат.

Переміщення на кожному з елементів інтерполюється поліномами

$$u_1 = \sum_{i=1}^{8}u_1^i\varphi_i, \ldots, \gamma_2 = \sum_{i=1}^{8}\gamma_2^i\varphi_i. \tag{9}$$

Тут $u_1^i, \ldots, \gamma_2^i$ - шукані переміщення в i - му вузлі.

 ISSN 1562-9945

3. **Числові результати.** В таблиці наведені результати обчислень на контурі отвору $\rho = r_{10}$ коефіцієнтів концентрації напружень

$$k_\rho^T = \frac{T_\rho}{E_1 h} 10^3,\ k_\theta^T = \frac{T_\theta}{E_1 h} 10^3,\ k_\rho^G = \frac{G_\rho}{E_1 h^2} 10^3,\ k_\theta^G = \frac{G_\theta}{E_1 h^2} 10^3$$

для ортотропної панелі з параметрами:

$$R/h = 41{,}25;\ r_0/h = 3{,}3;\ E_2/E_1 = 1{,}25;\ G_{12}/E_1 = 0{,}23;\ \nu_1 = 0{,}2\,.$$

Таблиця

$\theta / \frac{\pi}{14}$	0	1	2	3	4	5	6	7
K_ρ^T	$\frac{-0{,}03}{-0{,}01}$	$\frac{-0{,}04}{-0{,}01}$	$\frac{-0{,}11}{-0{,}02}$	$\frac{0{,}16}{0{,}23}$	$\frac{1{,}04}{0{,}83}$	$\frac{1{,}50}{1{,}14}$	$\frac{1{,}08}{0{,}79}$	$\frac{1{,}16}{0{,}66}$
K_ρ^G	$\frac{0{,}01}{0{,}05}$	$\frac{0{,}01}{0{,}07}$	$\frac{0{,}03}{0{,}11}$	$\frac{0{,}04}{0{,}17}$	$\frac{0{,}03}{0{,}25}$	$\frac{0{,}05}{0{,}37}$	$\frac{0{,}09}{0{,}50}$	$\frac{0.12}{0{,}55}$
K_θ^T	$\frac{0{,}05}{-0{,}23}$	$\frac{0{,}27}{-0{,}07}$	$\frac{0{,}65}{-0{,}01}$	$\frac{1{,}28}{0{,}09}$	$\frac{3{,}48}{1{,}58}$	$\frac{8{,}16}{5{,}39}$	$\frac{12{,}17}{9{,}87}$	$\frac{20{,}77}{18{,}92}$
K_θ^G	$\frac{0{,}55}{0{,}50}$	$\frac{0{,}56}{0{,}52}$	$\frac{0{,}56}{0{,}52}$	$\frac{0{,}46}{0{,}44}$	$\frac{0{,}18}{0{,}26}$	$\frac{-0{,}11}{0{,}07}$	$\frac{-0{,}14}{-0{,}02}$	$\frac{-0{,}04}{-0{,}04}$

В чисельниках приведені значення розрахунків для панелі з параметрами між шарових зсувів $\frac{G_{13}}{E_1} = \frac{G_{23}}{E_1} = 0{,}01$, а в знаменниках – відповідно для $\frac{G_{13}}{E_1} = \frac{G_{23}}{E_1} = 0{,}1$, що відповідає більшій жорсткості поперечного зсуву.

ЛІТЕРАТУРА

1. Методи розрахунку оболонок. В 5 т. Т.1. Гузь О.М., Чернишенко І.С., Чехов Вал.М., Чехов Вік.М., Шнеренко К.І. Теорія тонких оболонок, послаблених отворами. - Київ: Наук.думка,1980.-636 с.

Получено __.__.2006 г.