

УДК 539.3

К.Г. Головки, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш

**К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ  
ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА  
УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ТИПА ВИНКЛЕРА ПРИ  
ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗКАХ**

**Введение.** Задачи динамического взаимодействия цилиндрических оболочек с упругими средами являются актуальными, поскольку цилиндрические оболочки находят широкое применение в современных инженерных конструкциях и сооружениях в виде тоннелей, резервуаров, трубопроводов, бурильных и обсадных колонн – труб. В математическом плане такие задачи являются достаточно сложными в плане постановки и решения (использование уравнений теории упругости, формулировка условий контакта среда – оболочка, построение численного алгоритма решения исходных задач и т. д.) Существуют более простые подходы расчета взаимодействия между конструкцией и окружающей средой [1]. Одной из таких моделей является модель упругой среды Винклера. Динамическое взаимодействие сферических и цилиндрических оболочек с двухсторонними и односторонними упругими основаниями типа Винклера в осесимметричной постановке рассмотрено в монографии [2]. Вынужденные колебания бесконечной цилиндрической оболочки, заключенной в упругую среду, при неосесимметричном нагружении с учетом основания типа Винклера и Пастернака рассмотрены в работе [3].

В данной работе рассмотрена нестационарная задача динамического деформирования подкрепленной цилиндрической оболочки, заключенной в упругую среду, которая моделируется основанием типа Винклера.

**Постановка задачи.** Рассматривается изотропная подкрепленная цилиндрическая оболочка с учетом дискретного расположения ребер, находящаяся в упругой среде, которая моделируется упругим основанием типа Винклера [1]. Предполагается, что оболочка подвержена внутреннему нормальному импульсному нагружению.

Динамическое поведение дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки описывается уравнениями колебаний теории оболочек и стержней типа Тимошенко [4] с учетом слагаемых,

моделирующих упругое основание. При выводе уравнений колебаний использовался геометрически нелинейный вариант теории оболочек типа Тимошенко в квадратичном приближении. Исходные уравнения колебаний неоднородной оболочечной структуры имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + P_1 &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho F_j \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \Big|_{x=x_j} \\ \frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} - \sum_{j=1}^J \frac{T_{22j}}{R_j} \Big|_{x=x_j} - k_{\Pi} u_3 + P_3 &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \Big|_{x=x_j} \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho F_j \left[ \pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{crj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] \Big|_{x=x_j} \\ \bar{T}_{13} &= T_{13} + T_{11} \Theta_1; \quad h_{cj} = 0.5(h + h_j). \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) введены следующие обозначения:  $u_1, u_3, \varphi_1$  – компоненты обобщенного вектора перемещений;  $\rho$  – плотность материала оболочки и ребер;  $h, h_j, F_j, I_{krj}$  – геометрические параметры оболочки и ребер;  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $R_j$  – радиус  $j$ -го кольца относительно центра тяжести его поперечного сечения;  $x, t$  – пространственная и временная координаты;  $k_{\Pi}$  – коэффициент постели;  $x_j$  – линии сопряжения оболочка – подкрепляющее кольцо;  $P_3(x, t)$  – нагрузка.

Связь между величинами усилий-моментов и соответствующих деформаций определяется согласно формул

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\ T_{13} &= B_{13} k^2 \varepsilon_{13}, \quad M_{11} = D_{11} \kappa_{11}, \quad T_{22j} = B_{22j} \varepsilon_{22j}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad B_{11} = B_{22}, \quad B_{13} = Gh, \\ D_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad B_{22j} = EF_j; \end{aligned}$$

$E, G, \nu$  – физико – механические параметры материала оболочки и ребер.

Величины деформаций в формулах (2) выражаются через компоненты обобщенного вектора перемещений по формулам

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \Theta_1^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_3}{R}, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \Theta_1, \quad (3)$$

$$\Theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}.$$

Уравнения колебаний (1) – (3) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями. В частности, для случая жестко заземленных краев цилиндрической оболочки при  $x = 0, x = L$  имеем граничные условия

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0; \quad (4)$$

и начальные условия при  $t = 0$   $u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0$ ,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

**Численный алгоритм.** Исходные уравнения колебаний дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки (1) – (3) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Исходя из этого, строится алгоритм решения задачи в гладкой области и алгоритм решения на линиях разрывов в точках  $x = x_j$  [4]. Алгоритм решения в гладкой области основан на совместном применении интегро – интерполяционного метода построения разностных схем по пространственной координате и явной конечно – разностной схеме по временной координате [5].

**Численные результаты.** Рассматривалась подкрепленная цилиндрическая оболочка с жестко заземленными краями (граничные условия – (4)) при действии распределенной внутренней нагрузки

$$P_3(t) = A[\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где  $A$  – амплитуда нагрузки,  $T$  – длительность нагрузки.

Задача решалась при следующих физико – механических и геометрических параметрах:  $L/h = 80$ ;  $R/h = 10$ ;  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $A = 10^6$  Па;  $T = 50 \cdot 10^{-6}$  с. Коэффициент постели  $c_{\Pi} = 4,6 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>3</sup>. Предполагается, что оболочка покреплена тремя ребрами в точках  $x_j = jL/4$  ( $j = \overline{1, 3}$ ).

Ниже приведены характерные зависимости величин  $u_3$  (Рис.1) и  $\sigma_{22}$  (Рис.2) по пространственной координате  $x$  в момент времени

$t=2,25T$ . Кривая с индексом 1 соответствует расчетным величинам с учетом упругого основания, с индексом 2 – без учета последнего. Как следует из полученных результатов и приведенных графиков, учет упругого основания при указанных исходных данных влечет за собой не только изменение частотных характеристик (частота колебаний оболочки с учетом основания повышается), но и амплитудных характеристик. Разница по максимальным значениям прогиба  $u_3$  и напряжения  $\sigma_{22}$  достигает порядка 50-70%. Для обоих случаев расчетов четко проявляется влияние дискретных подкрепляющих элементов на параметры напряженно – деформируемого состояния исходной конструкции.

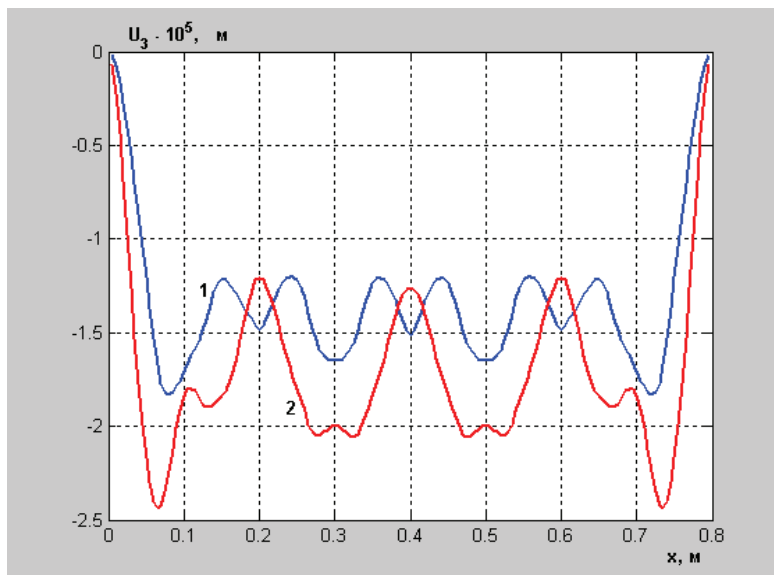


Рисунок 1

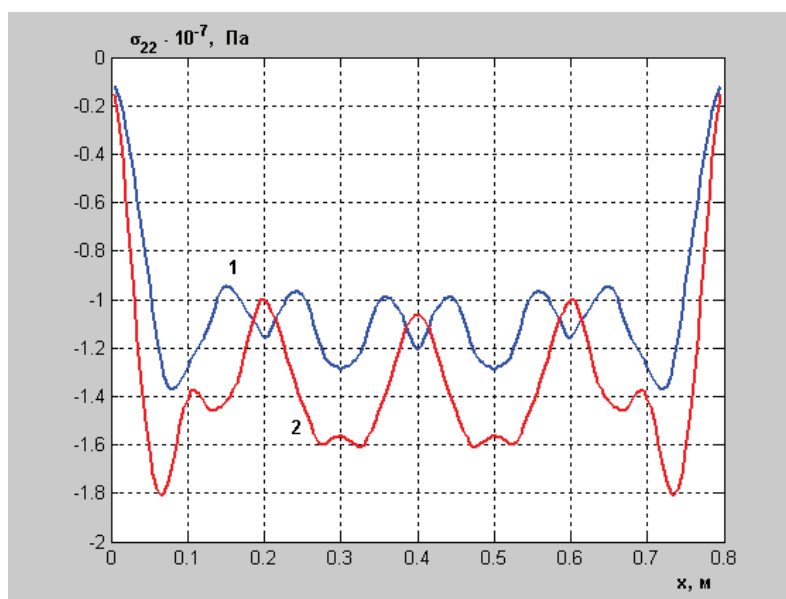


Рисунок 2

**Выводы.** В данной работе представлена постановка задачи о вынужденных колебаниях цилиндрической оболочки с учетом дискретного размещения ребер и учетом упругого основания типа Винклера. На основании развитого численного метода приведены числовые результаты динамического поведения исходной конструкции при внутренней импульсной нагрузке.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – Киев: Сталь, 2000. – 600с.
2. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков:ХНАДУ, 2004. – 392 с.
3. Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок /Кохманюк С.С., Дмитриев А.С., Шелудько Г.А. и др. Киев: Наукова думка, 1989. – 304 с.
4. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Численное моделирование динамического поведения подкрепленных оболочек вращения при нестационарном воздействии // Прикладная механика. – 1992, 28. - № 11. – С. 38 – 44.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

Получено 23.02.06