УДК 539.3

В.Н. Чехов, В. П. Корж

ПОВЕРХНОСТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ СЖАТИИ

Введение. В работе в трехмерной постановке с использованием модели кусочно-однородных сред исследуется поверхностная неустойчивость слоистых несжимаемых полуограниченных тел, которые помещены без трения между абсолютно жесткими стенками и образованы регулярным повторением порождающего пакета из двух слоев. Расстояние между стенками не изменяется и к поверхности материала приложено равномерное давление в виде «мертвой» нагрузки. Таким образом, в направлении простирания слоев предполагается отсутствие деформаций. За счет неизменяемости расстояния между стенками под действием поверхностной нагрузки появляются сжимающие нагрузки в плоскости слоев, которые могут вызвать потерю устойчивости. К такой постановке задачи можно прийти при рассмотрении устойчивости цилиндрических или слоистых сферических оболочек большого радиуса в условиях поверхностного обжатия. Такое явление исследовалось в работе [4] При изучении устойчивости единичного слоя под действием мертвых поверхностных нагрузок. Явление поверхностной неустойчивости в слоистых композитах регулярной структуры изучалось на основе трехмерной линеаризированной теории устойчивости при малых докритических деформациях в рамках модели кусочно-однородных сред в работах [4,6,7]. Здесь рассматривалась поверхностная неустойчивость среды, когда она нагружено равномерно распределенными сжимающими, нагрузками, действующими в плоскости слоев и по нормали к ним. В отличие от этого в данной работе предполагается, что докритические деформации являются конечными.

1. **Постановка задачи и метод решения**. Отнесем рассматриваемое слоистое полупространство к лагранжевой системе координат θ^i, до деформирования совпадающей с декартовыми координатами. Уравнения устойчивости, условия сопряжения

элементов слоистой среды и граничные условия на поверхности среды и на «бесконечности» для гиперупругих изотропных сред в рамках трехмерной теории устойчивости [3] при принятых в [1, 3] критериях устойчивости принимают вид

$$\nabla_i(\kappa^{ij\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha)_{(k)} - (\rho\ddot{u}^j)_{(k)} = 0, \quad (\theta^i \in V_k) \tag{1}$$

$$[N_i^{(2)}\kappa^{ij\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha]_{(k-1)} + [N_i^{(1)}\kappa^{ij\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha]_{(k)} = 0, \quad (\theta^i \in S_k) \tag{2}$$

$$u^j_{(k-1)} = u^j_{(k)}, \quad (N_i^{(k,2)} = -N_i^{(k,1)}), \quad (\theta^i \in S_k) \tag{3}$$

$$(N_i\kappa^{ij\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha)_{(k)} = P^j_{(k)}, \qquad u^j_{(k)} = 0 \quad (\theta^i \in F_k) \tag{4}$$

$$(N_i\kappa^{ij\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha)_{(1)} = P^j_{(0)}, \quad (\theta^i \in S_0) \tag{5}$$

$$u^j_{(T+1)} \to 0 \quad (\theta^i \to -\infty) \tag{6}$$

$$(q^{ij}\nabla_i u_j)_{(k)} = 0 \;; \; q^{ij} = q^{im}_{0*}(g^j_m + \nabla_m u^j_0). \tag{7}$$

Здесь p – множитель Лагранжа, а к- тензор четвертого ранга. Для исследования задачи используется статический подход Эйлера. Считаем, что координаты θ^i совпадают с декартовыми координатами ($\theta^i = x_i$). Ось Ox_3 направлена по нормали к поверхности слоистой среды. Докритическое состояние является плоским в плоскости x_1Ox_3 и характеризуется следующими соотношениями:

$$u_i^{0(k)} = (\lambda_i^{(k)} - 1)x_i^{(k)}; \;\; 2\varepsilon_{ij}^{o(k)} = \delta_{ij}(\lambda_i^{(k)2} - 1); \;\; \varepsilon_{11}^{0(k)} = 0; \; ij = 1,3; \; k = 1,2,...\infty \tag{8}$$

Здесь - $\lambda_n = \sqrt{1+2\varepsilon_{nn}} = 1,$ -коэффициент укорочения при сжатии вдоль Ox_n.

Индексом "0" отмечены компоненты докритического состояния. Из условия несжимаемости в докритическом состояния [3] $\lambda_1\lambda_3$ =1 получаем:

$$\lambda_1 = \lambda_3^{-1} = 1; \;\; S_{11}^{0(k)} = S_{33}^{0(k)} = -p_3 \tag{9}$$

Таким образом, пришли к задаче о всестороннем равномерном сжатии. Согласно постановке задачи в пределах каждого *к-го* слоя уравнения устойчивости (1) и условия несжимаемости (7) можно переписать [8]

$$\frac{\partial}{x_i}(S_{ij} + S_{ir}^0\frac{\partial}{x_r}u_j) = 0; \quad G_{ir}^0\frac{\partial}{x_i}u_r = 0 \tag{10}$$

При однородном докритическом состоянии эти выражения принимают вид.

 ISSN 1562-9945

$$(\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial x_3^2}+\eta_j^2\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial x_1^2})=0 \qquad (11)$$

Коэффициенты η_j имеют весьма громоздкий вид и в случае p_3=Const являются постоянными. При всестороннем сжатии имеем условие $\eta_1^{(\kappa)}=\eta_3^{(\kappa)}$=1. Поэтому для потенциалы Ψ_j можно представить в виде:

$$\Psi_j(x_1,x_3)=[sA_t^{(j)}\exp(\frac{\pi}{l}\widetilde{x}_3)+sB_t^{(j)}(-\frac{\pi}{l}\widetilde{x}_3)]\sin(\frac{\pi}{l}x_1); \qquad (12)$$

$$\widetilde{x}_3=x_3-x^{(n,q)};\quad x^{(n,q)}=(n-1)h+\sum_{i=1}^{q}h_i;\quad x^{(n,m)}=x^{(n+1,0)};\; x^{(n,q-1)}\langle x_3\langle x^{(n,q)};$$

Здесь *s=1* при j=1; $s=\tilde{x}_3$ при *j=3*; *t=m(n-1); n=1,2,...∞; q=1,2,...m;*

h_κ - толщина *к*-го слоя, *l* – общая для всех слоев длина полуволны формы потери устойчивости; $A_t^{(j)},B_t^{(j)}$- постоянные интегрирования. Используя метод решения задач устойчивости для слоистых сред регулярной структуры [8], при удовлетворении условиям межслоевого контакта получаем бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{l} F_1\vec{T}_{(q-1)m+1}=F_2S_2\vec{T}_{(q-1)m+2} \\ F_2\vec{T}_{(q-1)m+2}=F_3S_3\vec{T}_{(q-1)m+3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m\vec{T}_{qn}=F_1S_1\vec{T}_{qm+1} \end{array}. \qquad (13)$$

Здесь обозначено $\vec{T}=\left\|A^{(1)},A^{(3)},B^{(1)},B^{(3)}\right\|'$ - вектор столбец постоянных интегрирования; F_k,S_k– квадратные матрицы четвертого порядка, явный вид которых приведен в работе [8]; штрихом «’» отмечена процедура транспонирования. Решение уравнения (2.4) разыскиваем в виде

$$\vec{T}_{nm}=\kappa^n F_m^{-1}\vec{X}\,. \qquad (14)$$

Для определения собственного вектора $\vec{X}$ и скалярной величины κ имеем следующее матричное равенство

$$[(\prod_{j=1}^{m}F_jS_jF_j^{-1})-\frac{1}{\kappa}E]\vec{X}=0\,, \qquad (15)$$

где *E*- единичная матрица четвертого порядка. Таким образом, κ является характеристическим числом передаточной матрицы

$H=\prod_{j=1}^{m}(F_jS_jF_j^{-1})=[h_{ic}]$, где i,c =1,2,3,4, а $\vec{X}$ - соответствующим собственным вектором. Используя решение (14) и граничные условия на поверхности слоистого полупространства задачу удовлетворения краевым условиям, как и в [8]; сводим к решению системы двух однородных алгебраических уравнений относительно новых постоянных $\tilde{X}_1,\tilde{X}_2$.

Из условия существования нетривиальных решений этой системы получаем характеристическое уравнение

$$\det[DF_1^{-1}\vec{X}_1, DF_1^{-1}\vec{X}_2]=0 \qquad (16)$$

минимальные корни, которого и определяют критические значения параметров нагружения и волнообразования, обуславливающих явление потери устойчивости в структуре слоистого материала.

2. **Анализ результатов.** Решения уравнения (16) и анализ их выполнялись численно с помощью пакета типовых программ на ПЭВМ. На рисунке и в таблице приведены результаты решения задачи. Для описания физико-механических свойств слоев выбирался потенциал Трелоара $\Phi^{(\kappa)}$ в виде:

$$\Phi^{(\kappa)}=C_{10}^{(k)}(I_1^{(k)}-3);\; I_1^{(k)}=3+2A_1^{(k)};\quad A_1^{(k)}=\varepsilon_{11}^{0(k)}+\varepsilon_{33}^{0(k)};2\varepsilon_{ii}^{0(k)}=\lambda_i^{(k)2}-1 \qquad (17)$$

Здесь фиксировались параметры задачи $n=C_{10}^{(2)}/C_{10}^{(1)}$; $\rho=h_1/(h_1+h_2)$;

$t=p_3/C_{10}^{(1)}$; $\omega=\dfrac{\pi}{l}(h_1+h_2)$. Поскольку в работе исследуется потеря устойчивости в структуре материала, то для их определения находилась зависимость $p_3=p_3(\omega)$, точки экстремуму которой и являются искомыми величинами. На рисунке кривые *1, 2, 3* получены для ρ= 0,1; и n= 0,001; 0,01; 0,1 соответственно. Штриховой линией здесь показан график решения задачи, когда сжимающие нагрузки p_1 действуют лишь вдоль слоев. $t=p_1/C_{10}^{(1)};p_3=0;\varepsilon_{11}^0\neq 0;n=0{,}01$). В таблице приведены значения минимальных корней t и ω уравнения (16) для n = 0,5 и различных ρ. Величины в скобках определяют критические значения параметров задачи.

 ISSN 1562-9945

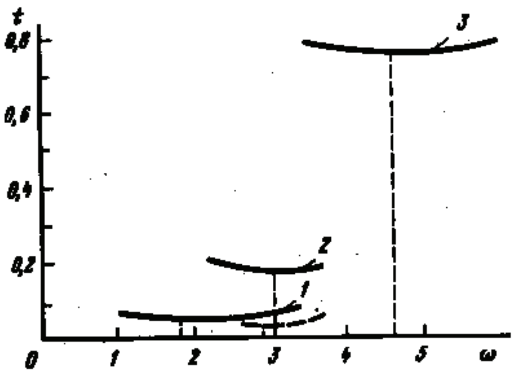

Рисунок 1

Таблица 1

ρ	$(p_3/C_{10}^{(1)})/\omega$					
0,3	$\frac{2,597}{2,7}$	$\frac{2,59}{2,8}$	$\frac{2,586}{2,9}$	$\frac{(2,584)}{(3ч3,1)}$	$\frac{2,586}{3,2}$	$\frac{2,59}{3,3}$
0,5	$\frac{2,99}{1,7}$	$\frac{2,945}{2,1}$	$\frac{2,939}{2,2}$	$\frac{(2,937)}{(2,3)}$	$\frac{2,939}{2,4}$	$\frac{2,944}{2,5}$
0,9	$\frac{3,777}{1,2}$	$\frac{3,773}{1,3}$	$\frac{3,771}{1,4}$	$\frac{(3,770)}{(1,5ч1,6)}$	$\frac{3,772}{1,7}$	$\frac{3,775}{1,8}$

Краткий анализ полученных решений показывает следующее. Явление поверхностной неустойчивости под действием лишь сил поверхностного обжатия при отсутствии деформаций в плоскости слоев может реализоваться при "мертвых" значениях нагрузки и отсутствует при следящем [5] ее характере. Указанный вывод согласуется с результатами, полученными для конструктивно-однородных тел. Существенное различие упругих постоянных слоев приводит к значительному уменьшению критических нагрузок. Так, например, при $n = 0{,}001$ $t_{кр} = 0{,}049$, а при $n = 1$ (случай однородной полуплоскости) $t_{\text{кр}} = 4$. Заметим, что указанные выводы имеют место лишь при заданных здесь параметрах слоистой среды. При других характеристиках слоев необходимо проводить дополнительные исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях.— Киев : Наук. думка; 1973.— 270 с.
2. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии.- Киев : Наук, думка, 1979.— 142с.
3. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел.— Киев : Вищ. шк.,1986.— 504с.

4. Гузь А. Н., Корж В. П., Чехов В. Н. Неустойчивость слоистых тел при сжатии с учетом действия поверхностных распределенных нагрузок//Прикл. механика.—1989.—25, № 5.—С. 13—22.
5. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Линеаризированная теория складкообразования в толще земной коры//Там же.— 1975.— 11, № 1.— С. 3—17.
6. Чехов В.Н. Поверхностная неустойчивость слоистой среды, сопряженной с однородным полупространством // Там же.— 1984.— 20, № 11.— С. 35—42.
7. Чехов В. Н. Влияние поверхностной нагрузки на устойчивость слоистых тел// Там же.—1988.—24, № 9.—С. 10—17.
8. Гузь А. Н., Чехов В. Н. Поверхностная неустойчивость слоистых материалов при малых и конечных докритических деформациях//Механика композитных материалов.— 1984—№ 5.— С. 838—843.

Получено __.__.2006 г.