

УДК 539.3

В.С. Коноваленков, А.И. Лях

ДЕФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ СТЕРЖНЕЙ С УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ

Стержневые элементы находят широкое применение как при создании разнообразных несущих конструкций, так и различного рода технических устройств. Для современных оптимальных конструкций актуальна проблема наиболее полного использования прочностных свойств стержней. При этом традиционно используются жесткие или упругие опоры (например, стержневые наборы-перекрытия в корпусе корабля, в которых при выпучивании одних стержней другие играют роль упругих опор [1]).

В [2] рассмотрено деформирование упругого элемента регулятора давления, выполненного в виде обрешиненного каркаса, состоящего из начально изогнутых стержней. Резина обеспечивает герметичность элемента и повышение его упругих свойств (т.е. резина выполняет роль упругого основания).

В [3] жесткость сжатого в осевом направлении начально несовершенного стержня повышалась за счет приложения нагрузки с эксцентриситетом, вызывающим рост прогибов в направлении, противоположном направлению начального прогиба.

В [4] рассмотрено деформирование начально изогнутого стержня с упругой промежуточной опорой, один конец которой неподвижен. Исследовано влияние жесткости упругой опоры на повышение критической нагрузки стержня.

В [5] рассмотрено деформирование начально изогнутых стержней, находящихся на расстоянии друг от друга и соединенных упругой связью. В случае, если стержни изгибаются в противоположные стороны, связь может быть односторонней, т.е. в качестве ее могут быть использованы менее материалоемкие гибкие элементы, работающие только на растяжение. Показано, что посредством таких гибких элементов может осуществляться взаимная “поддержка” стержней, сжимаемых в осевом направлении.

В данной работе рассмотрено деформирование двух начально изогнутых стержней, соединенных посередине упругой связью; концы

стержней шарнирно соединены между собой (рис.1) [6]. Расстояние между шарнирами равно l .

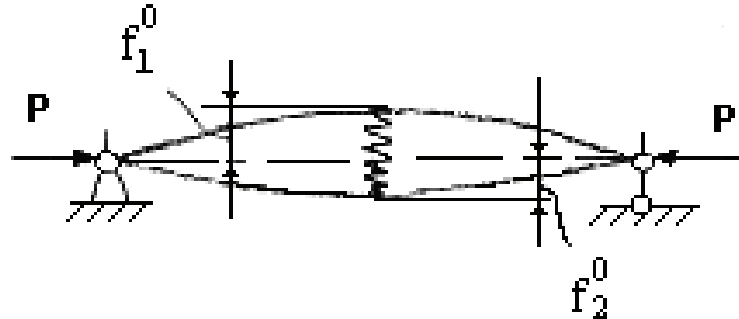


Рисунок 1

Стержни имеют начальные прогибы в виде полуволн синусоиды

$$V_i^0(x) = f_i^0 \cdot \sin \frac{\pi x}{l_i}, \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

где f_i^0 , l_i — амплитуда начального прогиба и длина i -го стержня;

x — продольная координата;

i — номер стержня.

Для такой системы стержней, в отличие от рассмотренных в [5], заранее неизвестны величины нагрузок P_1 и P_2 , приходящиеся на стержни 1 и 2. Эти величины должны определяться в результате расчета из условия совместности деформирования стержней при действии общей нагрузки $P (P = P_1 + P_2)$.

Длины стержней до искривления можно найти, используя выражение для длины элемента изогнутой линии стержня dS_i [1]

$$dS_i = dx \left[1 + \left(\frac{d(V_i^0 + V_i)}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где V_i — добавочный прогиб i -го стержня при нагружении.

Применяя формулу бинорма Ньютона и ограничиваясь двумя членами ряда, получим

$$dS_i = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d(V_i^0 + V_i)}{dx} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Полная длина i -го стержня l_i (до искривления) определяется из (3) при $V_i = 0$

$$l_i = l + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left(\frac{dV_i^0}{dx} \right)^2 dx. \quad (4)$$

Используя (1), из (4) получаем квадратное уравнение относительно l_i

$$4l_i^2 - 4ll_i - \pi^2 \cdot f_i^{02} = 0, \quad (5)$$

из которого находим

$$l_i = \frac{l}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\pi f_i^0}{l} \right)^2} \right). \quad (6)$$

Смещение точки приложения силы P в направлении действия этой силы для i -го стержня определится в виде

$$\Delta_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left[\left(\frac{d(V_i^0 + V_i)}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d(V_i^0)}{dx} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \frac{dV_i^0}{dx} \cdot \left(2 \frac{dV_i^0}{dx} + \frac{dV_i}{dx} \right) dx. \quad (7)$$

Тогда условия совместности деформирования стержней можно записать в виде

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_2; \\ P = P_1 + P_2. \end{cases} \quad (8)$$

Система уравнений, описывающая деформирование стержней, имеет вид [5]

$$E_i J_i \cdot \frac{d^2 V_i}{dx^2} + P_i \cdot V_i = -P_i V_i^0 - \frac{c(f_1 + f_2)}{2} x, \quad (9)$$

где E_i — модуль Юнга материала i -го стержня;

J_i — момент инерции поперечного сечения i -го стержня;

f_i — величина добавочного прогиба посередине i -го стержня;

c — жесткость упругой связи.

Решение системы (8) имеет вид

$$V_i = -A_i \cdot \cos k_i x + B_i \cdot \sin k_i x - \frac{c(f_1 + f_2)}{2P_i} x + \frac{f_i^0 \cdot P_i}{P_{кр i} - P_i} \cdot \sin \frac{\pi x}{l_i}, \quad (10)$$

где $k_i = \sqrt{\frac{P_i}{E_i J_i}}$;

$P_{кр i} = \frac{\pi^2 E_i J_i}{l_i^2}$ — критическая Эйлера нагрузка i -го стержня.

Величины A_i и B_i определяются из условий закрепления стержней и условий симметричности упругой линии

$$V_i|_{x=0} = 0; \quad \frac{dV_i}{dx} \Big|_{x=\frac{l}{2}} = 0$$

и равны

$$A_i = 0, B_i = \frac{c(f_1 + f_2)}{2P_i \cdot k_i \cdot \cos \frac{k_i l_i}{2}} \quad (11)$$

Величины f_1 и f_2 находятся из условий

$$V_i \Big|_{x=\frac{l}{2}} = f_i$$

и определяются формулами

$$f_1 = \frac{(f_2^* a_1 - f_1^* (a_2 - 1))}{\Delta};$$

$$f_2 = \frac{(f_1^* a_2 - f_2^* (a_1 - 1))}{\Delta}; \quad (12)$$

$$\text{где } a_i = \frac{c}{2P_i} \left(\frac{l_i}{2} - \frac{c}{2k_i} \operatorname{tg} \frac{k_i l_i}{2} \right);$$

$$\Delta = 1 - a_1 - a_2;$$

$$f_i^* = \frac{f_i^0 P_i}{P_{кр i} - P_i} \quad \text{— величина добавочного прогиба посередине } i\text{-го}$$

стержня при $c = 0$.

Подставляя (1), (7), (11) в (8) и исключая величину P_2 ($P_2 = P - P_1$), получаем уравнение для определения величины P_1

$$\Delta_1 - \Delta_2 = 0, \quad (13)$$

На рис. 2-5 приведены результаты расчетов, характеризующие особенности деформирования рассмотренных стержневых систем. На рис. 2 нанесены значения отношения величин нагрузок,

приходящихся на стержни 2 и 1 $\left(\frac{P_2}{P_1} \right)$; на рис. 3 нанесены значения

отношения величин полных прогибов посередине стержней 2 и 1 $\left(\frac{\overline{f_2}}{\overline{f_1}} \right)$,

где $\overline{f_i} = f_i^0 + f_i$) в зависимости от нагрузки P при $c = 0$.

Линии 1 на рис.2 и рис.3 относятся к случаю: $\frac{P_{кр 2}}{P_{кр 1}} = 1$; $f_1^0 = 8$ мм;

$f_2^0 = 5$ мм; линии 2: $\frac{P_{кр 2}}{P_{кр 1}} = 1,25$; $f_1^0 = 8$ мм; $f_2^0 = 5$ мм; $\left(\frac{f_2^0}{f_1^0} = 0,6 \right)$; линии

3: $\frac{P_{кр2}}{P_{кр1}} = 1,25$; $f_1^0 = f_2^0 = 5$ мм; $\left(\frac{f_2^0}{f_1^0} = 1\right)$. Геометрические параметры стержней: $l = 100$ мм; ширина 5 мм, толщина 2 мм; модуль упругости материала $E = 20000 \frac{кг}{мм^2}$.

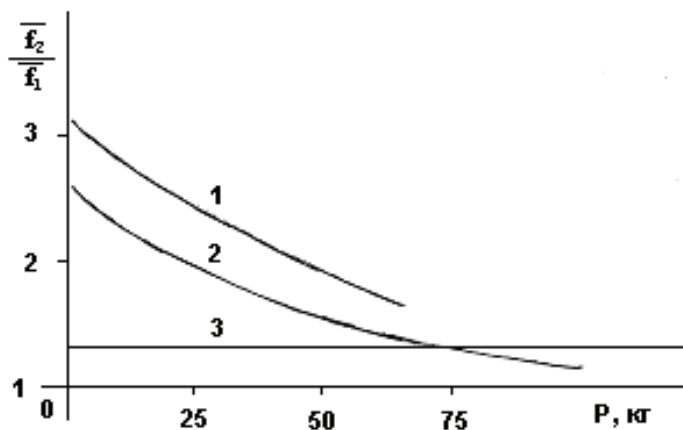


Рисунок 2

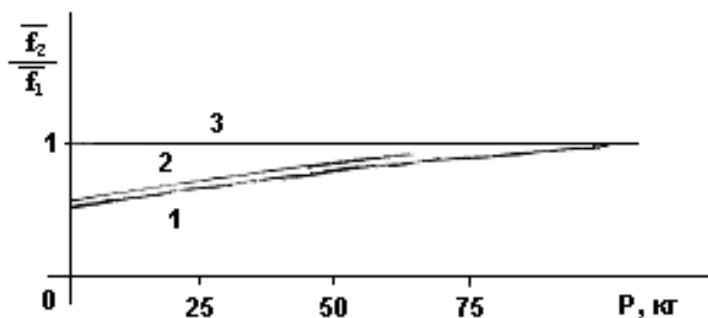


Рисунок 3

На рис. 4 нанесены значения величин прогибов посередине стержней, на рис. 5 — значения величин сближения концов стержней Δ_1 в зависимости от силы P (линии 1,2,3 соответствуют случаям $c = 0; 0,6$ и $5 \frac{кг}{мм}$; $f_1^0 = f_2^0 = 5$ мм).

Отметим, что случай $f_1^0 = f_2^0$ соответствует случаю стержня с упругой связью, один конец которой неподвижен [4], но с удвоенной жесткостью $2c$. В [4] показано, что критическая нагрузка такого стержня может быть повышена (в зависимости от жесткости упругой связи).

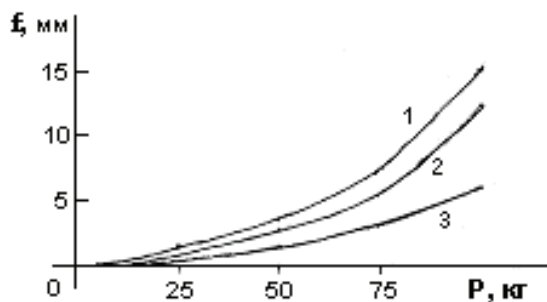


Рисунок 4

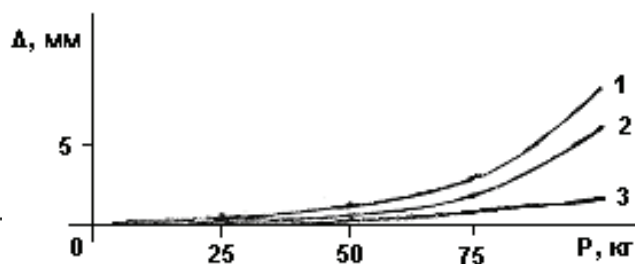


Рисунок 5

Таким образом, рассмотренная система стержней сочетает высокий уровень устойчивости с регулируемой жесткостью в осевом направлении, что дает возможность использовать эту систему в качестве упругих элементов для технических устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
2. Деменков А.Ф., Шевченко С.А. Расчет деформированного состояния эластично-упругого элемента регулятора давления // Проектирование сложных технических систем. Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 114-117.
3. Деменков А.Ф. Исследование работоспособности сжато-изогнутых стержней // Несущая способность и долговечность конструкций. Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 45-51.
4. Коноваленков В.С., Лях А.И. Исследование устойчивости стержне с упругой промежуточной связью // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. –Выпуск 3(14). – Днепропетровск, 2001. – С. 12-17.
5. Коноваленков В.С., Лях А.И. Деформирование стержней с упругой промежуточной связью // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. –Выпуск 4(21). – Днепропетровск, 2002. – С. 55-59.
6. Коноваленков В.С., Лях А.И. Деформирование начально изогнутых стержней с упругой промежуточной связью: Треття Всеукраїнська наукова конференція “Математичні проблеми технічної механіки.” Матеріали конференції. –Дніпродзержинськ, 2003. – С. 19.

Получено 11.05.2006 г.