Л.П. Зинчук, А.Н. Подлипенец

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРО-УПРУГИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ ИЗ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЛОЕВ

1 Вступление

В разнообразных радиотехнических устройствах в качестве электроакустических компонент перспективны к применению слоисто–периодические структуры из электроупругих материалов (пьезокомпозитов, сверхрешеток, многослойных звукопроводов и т.д.). Это и обуславливает необходимость в детальном моделировании и изучении в широком диапазоне частот закономерностей распространения акустоэлектрических волн в слоистых средах с пьезоэффектом и, в частности, отражения волн от таких слоисто-периодических структур. Физико-механические свойства подобных структур можно изменять в достаточно широких пределах и тем самым получать материалы и конструктивные элементы с оптимальными характеристиками. Об интересе к вопросам отражения волн от многослойных структур можно судить по работам [1-3].

В даной статье на основе подхода, предложенного в [4,5], исследуются частотные характеристики отражения сдвиговых акустоэлектрических волн, которые падают на границу однородного пьезоэлектрического полупространства класса *6mm* и регулярно-слоистого, образованного чередованием слоя металла и слоя пьезоэлектрика.

2 Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим однородное пьезоэлектрическое полупространство класса *6mm* $y<0$, $-\infty < x,z < +\infty$ (ось oz параллельна оси симметрии шестого порядка), граничащее с регулярно-слоистым полупространством $y>0$, образованным чередованием вдоль оси oy слоя идеально проводящего изотропного материала (металла) толщины h_1 и слоя пьезоэлектрика гексагонального класса *6mm* толщины h_2 ($h_1+h_2=h$). Пусть на границу раздела $y=0$ со стороны

ISSN 1562-9945

полупространства $y<0$ падает плоская сдвиговая волна. Распространение в плоскости xy сдвиговой волны, поляризованной вдоль оси oz, в изотропном слое металла описывается системой

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\rho_1\omega^2 w=0\,,\ \sigma_{zx}=c_{44,1}\frac{\partial w}{\partial x}\,,\ \sigma_{zy}=c_{44,1}\frac{\partial w}{\partial y}\,, \tag{1}$$

а в слое пьезоэлектрика и в полупространстве $y<0$ системой [6]

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\rho\omega^2 w=0\,,\qquad \frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}=0\,,\\ \sigma_{zx}=c_{44}\frac{\partial w}{\partial x}+e_{15}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\quad \sigma_{zy}=c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,\\ D_x=-\varepsilon_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+e_{15}\frac{\partial w}{\partial x}\,,\quad D_y=-\varepsilon_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial w}{\partial y}\end{gathered} \tag{2}$$

(временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее всюду опущен), где σ_{zx}, σ_{zy} – компоненты тензора напряжений, w – перемещение, D_x, D_y – компоненты вектора электрической индукции, φ – электрический потенциал, ω – частота. Свойства полупространства $y<0$ характеризуются параметрами ρ_0, $c_{44,0}$, $e_{15,0}$, $\varepsilon_{11,0}$, а пьезоэлектрического слоя – ρ_2, $c_{44,2}$, $e_{15,2}$, $\varepsilon_{11,2}$.

На границах раздела свойств среды
$y=y_{n,1}\equiv(n-1)h+h_1$, $\quad y=y_{n,2}\equiv nh$, $\quad y=y_{1,0}\equiv 0$, $\quad n=1,2,\ldots$ ($y_{n-1,2}=y_{n,0}$)

потребуем выполнения условий сопряжения

$$w(x,y_{n,q}-0)=w(x,y_{n,q}+0),\ \sigma_{zy}(x,y_{n,q}-0)=\sigma_{zy}(x,y_{n,q}+0),\ q=1,2\,. \tag{3}$$

Будем также считать, что проводящие металлические слои являются закороченными, а значит, справедливо условие

$$\varphi\left(x,y_{n,q}\right)=0\,,\ q=1,2\,. \tag{4}$$

Если $\left(n_{x,0};n_{y,0}\right)$ – направляющие косинусы плоской сдвиговой волны, падающей со стороны однородной пьезоэлектрической среды, то упругие и электрические поля в полупространстве $y<0$, определяемые суперпозицией падающей и отраженной волн, будут описываться выражениями [7,8]

$$w(x,y)=\left(A_0\exp(ik_{s,0}n_{y,0}y)+B_0\exp(-ik_{s,0}n_{y,0}y)\right)\exp(ik_{s,0}n_{x,0}x)\,, \tag{5}$$

$$\varphi(x,y)=\left(e_{15,0}\varepsilon_{11,0}^{-1}\left(A_0\exp(ik_{s,0}n_{y,0}y)+B_0\exp(-ik_{s,0}n_{y,0}y)\right)+\right.$$

ISSN 1562-9945

$$+F_0\exp\left(k_{s,0}n_{x,0}y\right)\Big)\exp\left(ik_{s,0}n_{x,0}x\right),\ \ y<0, \tag{6}$$

где A_0 – известная амплитуда падающей волны, B_0, F_0 – неизвестные амплитуды, а $k_{s,0}=\omega v_{s,0}^{-1}=\omega\sqrt{\rho_0/\bar{c}_{44,0}}$, $\bar{c}_{44,0}=c_{44,0}+e_{15,0}^2\varepsilon_{11,0}^{-1}$, $n_{x,0}=\sin\alpha$, $n_{y,0}=\cos\alpha$ ($0<\alpha<\pi/2$).

Учитывая условие (4), при $y=0$ получаем выражение для $F_0=-e_{15,0}\varepsilon_{11,0}^{-1}\left(A_0+B_0\right)$.

Представления для $\sigma_{zy}(x,y)$, $w(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ в регулярно-слоистом полупространстве с учетом (4) согласно [6] имеют вид

$$\mathrm{col}\left[\sigma_{zy}(x,y),w(x,y)\right]=L_m\left(y-y_{n,1}\right)\vec{A}_{2n-1}\exp(ikx),\quad y_{n,0}<y<y_{n,1}; \tag{7}$$

$$\mathrm{col}\left[\sigma_{zy}(x,y),w(x,y)\right]=L_p\left(y-y_{n,2}\right)\vec{A}_{2n}\exp(ikx),\quad y_{n,1}<y<y_{n,2};$$

$$\varphi(x,y)=\Big\{B_{2n}^{(1)}\,\mathrm{sh}\,k\left(y-y_{n,2}\right)+B_{2n}^{(2)}\,\mathrm{ch}\,k\left(y-y_{n,2}\right)+e_{15,2}\varepsilon_{11,2}^{-1}\times$$

$$\times\left(A_{2n}^{(1)}\sin\Omega_2\left(y-y_{n,2}\right)+A_{2n}^{(2)}\cos\Omega_2\left(y-y_{n,2}\right)\right)\Big\}\exp(ikx),\ \ y_{n,1}<y<y_{n,2}; \tag{8}$$

$$B_{2n}^{(1)}=e_{15,2}\varepsilon_{11,2}^{-1}\left(-A_{2n}^{(1)}\sin\left(\Omega_2h_2\right)+A_{2n}^{(2)}\left(\cos\left(\Omega_2h_2\right)-\mathrm{ch}\left(kh_2\right)\right)\right)/\mathrm{sh}\left(kh_2\right),$$

$$B_{2n}^{(2)}=-e_{15,2}\varepsilon_{11,2}^{-1}A_{2n}^{(2)},\ \ \vec{A}_{2(n-1)+q}=\mathrm{col}\left[A_{2(n-1)+q}^{(1)},A_{2(n-1)+q}^{(2)}\right],\ \left(q=1,2\right),$$

$$\Omega_2^2=\omega^2v_{s,2}^{-2}-k^2,\ \ v_{s,2}^2=\bar{c}_{44,2}/\rho_2,\ \ \bar{c}_{44,2}=c_{44,2}+e_{15,2}^2\varepsilon_{11,2}^{-1}.$$

Явный вид элементов матриц-функций $L_m\left(y-y_{n,1}\right)$, $L_p\left(y-y_{n,2}\right)$ можно найти в [6]. Для выполнения условий сопряжения (3) следует в (7)–(8) положить $k=k_{s,0}n_{x,0}=k_{s,1}n_{x,1}=k_{s,2}n_{x,2}$ (закон Снеллиуса), где $k_{s,1}=\omega v_{s,1}^{-1}=\omega\sqrt{\rho_1c_{44,1}^{-1}}$, $k_{s,2}=\omega v_{s,2}^{-1}=\omega\sqrt{\rho_2\bar{c}_{44,2}^{-1}}$.

Подстановка (5) и (7) в условия (3) приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} ia_0\left(A_0-B_0\right)-a_1\left(A_0+B_0\right)\\ A_0+B_0\end{bmatrix}=L_m\left(-h_1\right)\vec{A}_1,$$

$$L_m(0)\vec{A}_{2n-1}=L_p\left(-h_2\right)\vec{A}_{2n},$$

$$L_p(0)\vec{A}_{2n}=L_m\left(-h_1\right)\vec{A}_{2n+1},\ \ n=1,2,3,\ldots, \tag{9}$$

$$a_0=\bar{c}_{44,0}k_{s,0}n_{y,0},\ \ a_1=e_{15,0}^2\varepsilon_{11,0}^{-1}k_{s,0}n_{x,0}.$$

Решение системы (9) имеет вид [4,6]

$$\vec{A}_{2n-1}=K_1\chi_1L_m^{-1}(0)L_p\left(-h_2\right)L_p^{-1}(0)\vec{X}_1,\ \ \vec{A}_{2n}=K_1\chi_1L_p^{-1}(0)\vec{X}_1,$$

где χ_1 и $\vec{X}_1$- характеристическое число, и соответствующий собственный вектор передаточной матрицы $L = L_m(-h_1)L_m^{-1}(0)L_p(-h_2)L_p^{-1}(0)$, причем χ_1 находится по формулам [4,5]

$$\chi_1 = \begin{cases} b_s - \sqrt{b_s^2 - 1}, & b_s > 1 \\ \exp\left\{i\left((-1)^{l-1}\arccos b_s + 2\pi\left[\dfrac{l}{2}\right]\right)\right\}, & |b_s| < 1 \\ b_s + \sqrt{b_s^2 - 1}, & b_s < -1 \end{cases}$$

в которых $b_s = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}\,L$, l −порядковый номер появления неравенства $|b_s| < 1$ с ростом частоты от нуля, *[l/2]* – целая часть числа *l/2*.

При таком выборе решения все уравнения системы (9), за исключением первого, удовлетворяются. Оставшиеся неизвестные B_0 и K_1, определяются из первого уравнения системы (9):

$$B_0 = A_0 \frac{ia_0 X_1^{(2)} - a_1 X_1^{(2)} - X_1^{(1)}}{ia_0 X_1^{(2)} + a_1 X_1^{(2)} + X_1^{(1)}},\ K_1 = A_0 \frac{2ia_0}{ia_0 X_1^{(2)} + a_1 X_1^{(2)} + X_1^{(1)}}.$$

3 Результаты численных исследований

На рис.1 представлены результаты численного анализа зависимости коэффициента отражения $V = |B_0/A_0|$ от безразмерной частоты $\omega^* = \omega h\left(\rho_2 c_{44,2}^{-1}\right)^{1/2}$ при различных углах падения α: $\alpha = \pi/20$ (сплошная линия), $\alpha = \pi/6$ (штриховая линия), $\alpha = \pi/4$ (штрих-пунктирная линия). Рассматривается регулярно-слоистое полупространство, образованное чередованием слоя алюминия и слоя пьезокерамики PZT~4, которые характеризуются следующими параметрами: $\rho_1 = 2{,}7\cdot 10^3$ кг/м^3, $c_{44,1} = 2{,}57\lambda_0$, $h_1/h = 0{,}1$; $\rho_2 = 7{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3. $c_{44,2} = 2{,}56\lambda_0$, $e_{15,2} = 12{,}7$ Кл/м^2, $\varepsilon_{11,2} = 730\varepsilon_0$, $h_2/h = 0{,}9$ ($\lambda_0 = 10^{10}$ Па, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м - диэлектрическая проницаемость вакуума). Свойства однородного пьезоэлектрического полупространства совпадают со свойствами слоя толщины h_2. Следует отметить, что частотный спектр изменения коэффициента отражения имеет определенную, характерную для слоисто-периодических

 ISSN 1562-9945

систем, структуру [4,5]. В ней можно выделить диапазоны частот, соответствующие полному внутреннему отражению ($V=1$), между которыми идут так называемые «погружения» – уменьшения величины коэффициента отражения до определенного значения. Например, при $\alpha=\pi/4$ существует диапазон частот, где значение V близко к нулю. На рис. 2 показана зависимость коэффициента отражения V от частоты ω^* при $\alpha=\pi/20$ с учетом пьезоэффекта (сплошная линия) и без его учета (штриховая линия), т.е. при $e_{15,0}=e_{15,2}\equiv 0$. Как видно из рисунка, пьезоэффект приводит к некоторому изменению коэффициента отражения, увеличивая диапазоны частот, соответствующих полному внутреннему отражению.

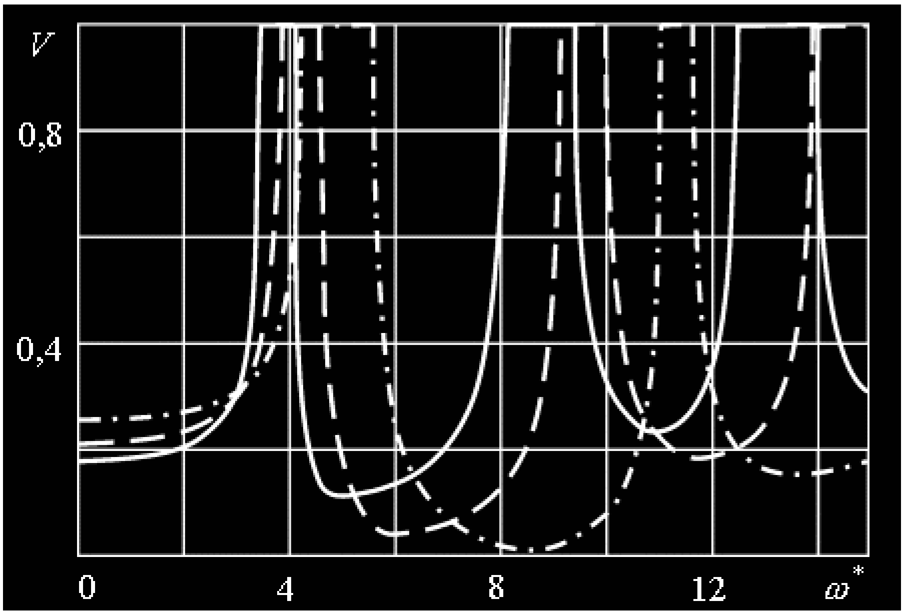

Рисунок 1

В заключение отметим, что численное моделирование проводилось для слоистых композиций с тремя возможными соотношениями характерных скоростей: 1) $v_{s,1}<v_{GB}<v_{s,2}$ (серебро – пьезокерамика); 2) $v_{GB}<v_{s,2}<v_{s,1}$ (алюминий – пьезокерамика); 3) $v_{GB}<v_{s,1}<v_{s,2}$ (цинк – пьезокерамика), где $v_{GB}=v_2\sqrt{1-e_{15,2}^4\left(e_{11,2}\bar{c}_{44,2}\right)^{-2}}$ – скорость волны Гуляева-Блюштейна на границе металлизированной свободной поверхности пьезоэлектрического полупространства. Зависимость коэффициента

отражения от частоты для каждого из перечисленных случаев имеет свои особенности, требующих детального изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shuvalov A. L. and Gorkunova A. S. Specific features of the acoustic diffraction from a periodic system of planar sliding-contact interfaces // Journal of Sound and Vibration. –2001. – V. 243, N 4. – P. 679-697.
2. Shuvalov A. L. and Lothe J. The Stroh formalism and the reciprocity properties of reflection-transmission problems in crystal piezo-acoustics // Wave Motion. –1997. – V. 25, N 4. – P. 331-345.
3. Aynaou H., Velasco V. R., Nougaoui A., Boudouti E. H. El., Djafari-Rouhani B. and Bria D. Application of the phase time and transmission coefficients to the study of transverse elastic waves in quasiperiodic systems with planar defects //Surface Science . – 2003, – V. 538. – P. 101-112.
4. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
5. Подлипенец А.Н. Отражение волн сдвига от ортотропного регулярно-слоистого композитного материала // Тр. X науч. конф. мол. ученых / АН УССР. Ин-т механики. – Киев, 1984. – 4.2. – С. 262-264. – Деп в ВИНИТИ 30.07.84, № 5535 – 4Деп.
6. Зинчук Л.П., Подлипенец А.Н. Поверхностные сдвиговые волны в слоистых композициях "металл–пьезокерамика" // Прикл. механика. – 1989. –25, № 11.– С.54–61.
7. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. - Новосибирск: Наука, 1982. – 240 с.
8. Auld B.A. Acoustic fields and waves in solids. Vol. II. – New York: Wiley, 1973. – 414 p.

Получено __.__.2006 г.