ній області: проміжні уявні результати в кінцевому підсумку дають реальні геометричні елементи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курек Г.К. Формообразование некоторых алгебраических минимальных поверхностей линейным каркасом специальных линий // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1975. – Вып. 20.– С. 99 – 102.
2. Шоман О.В. Геометрична інтерпретація комплексних потенціалів аналітичних функцій // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74.– С. 210 –215.

Получено 14.03.2006 г.

УДК 515.2

О.В. Шоман

МЕТОД АНАЛІТИЧНОГО ОПИСУ ПАРИ ПОВЕРХОНЬ, ЯКІ ПАРАЛЕЛЬНІ ГІПЕРБОЛІЧНОМУ ПАРАБОЛОЇДУ

Постановка проблеми. При дослідженні розвитку у часі гетерогенної системи речовин вважають, що геометрична форма активної поверхні розділу змінюється у просторі за певним законом (наприклад, за „геометричним" законом горіння [1]). Графічна ілюстрація динаміки розвитку системи полягає у зображенні поверхонь розділу для певних фаз процесу. Такі поверхні можна ототожнювати з *еквіфазними поверхнями* хвильового процесу, або, у тривіальному випадку, з паралельними поверхнями. Тому є актуальним описи паралельних поверхонь як графічного прояву активної поверхні розділу речовин.

Аналіз останніх досліджень. Паралельні поверхні можна описувати в результаті розв'язання диференціального рівняння в частинних похідних виду ейконал [2], або за допомогою нормальних рівнянь [3]. Другий підхід вважається більш універсальним, адже він спирається на графічне пояснення зв'язку між функцію-описом f і об'єктом-оригіналом L, яке полягає у виконанні умови

$$f(P) = \inf_G \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2}\ ; \qquad (G = (\xi_1\ ,\ \dots\ \xi_n) \in L).$$

В цьому випадку маємо нормальне рівняння $f(P) = 0$ об'єкта $L \in E^n$ [3]. Але можливість реалізувати нормальні рівняння на практиці з'явилася тільки з появою математичних процесорів, наприклад, пакету Maple [4, 5]. В процесі досліджень відкритим залишилося питання про універсальний метод побудови нормальних рівнянь у просторовому випадку, у тому числі і для поверхонь з сідловидною точкою.

Постановка завдання. Розробити метод опису та побудови поверхонь, які б задовольняли умові паралельності відносно сідловидної поверхні (як приклад - гіперболічного параболоїда) у випадку, коли у прямокутній системі координат *Oxyz* ця початкова поверхня задана параметричними рівняннями $x = \varphi(u, v)$; $y = \psi(u, v)$ і $z = \eta(u, v)$, де u, v – параметри.

Основна частина. Нехай в прямокутній системі координат *Oxyz* маємо „початкову" поверхню $x = \varphi(u, v)$; $y = \psi(u, v)$ і $z = \eta(u, v)$, де u, v – параметри. Оберемо у просторі довільну точку $T(x, y, z)$ і розглянемо функцію

$$f(x,y,z)=\sqrt{(x-\varphi(u,v))^2+(y-\psi(u,v))^2+(z-\eta(u,v))^2}\,. \quad (1)$$

Значення функції (1) в точці T дорівнює відстані між T і точкою M на поверхні, яка відповідає конкретному значенню параметрів u і v. Визначимо значення параметрів u і v, при яких функція (1) досягає екстремуму. Тобто визначимо значення параметрів, які б „забезпечили" мінімальну відстань $\inf(\rho(T,M))$.

Для цього спочатку обчислюємо частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial u}=-\frac{(x-\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+(y-\psi)\dfrac{\partial\psi}{\partial u}+(z-\eta)\dfrac{\partial\eta}{\partial u}}{\sqrt{(x-\varphi)^2+(y-\psi)^2+(y-\eta)^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{(x-\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+(y-\psi)\dfrac{\partial\psi}{\partial v}+(z-\eta)\dfrac{\partial\eta}{\partial v}}{\sqrt{(x-\varphi)^2+(y-\psi)^2+(y-\eta)^2}}, \quad (2)$$

і розв'язуємо відносно u і v систему рівнянь, одержану з цих виразів:

$$(x-\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial u}+(y-\psi)\frac{\partial\psi}{\partial u}+(z-\eta)\frac{\partial\eta}{\partial u}=0;$$

$$(x-\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial v}+(y-\psi)\frac{\partial\psi}{\partial v}+(z-\eta)\frac{\partial\eta}{\partial v}=0. \quad (3)$$

 ISSN 1562-9945

Знайдені (дійсні) значення u_0 і v_0 підставляємо у вираз (2). Одержана функція

$$f_N = \sqrt{(x-\varphi(u_0,v_0))^2 + (y-\psi(u_0,v_0))^2 + (z-\eta(u_0,v_0))^2} \quad (4)$$

матиме властивості нормальної функції [4]. Тобто рівнянням

$$f_N(x,y,z) = const \quad (5)$$

буде описано сім'ю поверхонь з елементами, паралельними (або еквіфазними) відносно початкової поверхні $x = \varphi(u, v)$; $y = \psi(u, v)$ і $z = \eta(u, v)$. В чотиривимірному просторі $Oxyz\xi$ рівнянням $\xi = f_N(x,y,z)$ буде описано лінійчату гіперповерхню „рівного нахилу". Тобто буде описано абстрактну поверхню, у якої всі твірні з простором $Oxyz$ „утворять кути 45°". Звідси зрозуміло, що рівнянням $f_N(x,y,z) = const$ буде описано сім'ю поверхонь з елементами, паралельними відносно початкової поверхні. Було складено Maple-програму опису нормальної функції, яку покладено в основу визначення та візуалізації як „початкової" поверхні, так і паралельних поверхонь, описаних одержаними параметричними рівняннями.

Для гіперболічного параболоїда $x = u\operatorname{ch} v$; $y = u\operatorname{sh} v$ і $z = u^2/2$ система рівнянь (3) має вигляд

$$u^3 + 2(1-z)u - 2(x\operatorname{ch} v + y\operatorname{sh} v) + 4u\operatorname{ch}^2 v = 0;$$
$$u\left(x\operatorname{sh} v + y\operatorname{ch} v - 2u\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v\right) = 0. \quad (6)$$

Розв'язок системи рівнянь (6) знаходимо в *maple*-кодах

$$u0 := \mathrm{RootOf}((2\,x + 2\,z\,x + 2\,z\,y - 2\,y)\,\_Z^{10}$$
$$+ (-3\,x\,y^2 - 2\,x - y^3 - 2\,y - 3\,x^2\,y - 2\,z\,x - x^3 + 2\,z\,y)\,\_Z^8$$
$$+ (-3\,x\,y^2 + 3\,x^2\,y + 4\,y - 4\,z\,y + 3\,x^3 - 3\,y^3 - 4\,x - 4\,z\,x)\,\_Z^6$$
$$+ (3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 + 4\,y - 3\,y^3 + 4\,x - 3\,x^3 - 4\,z\,y + 4\,z\,x)\,\_Z^4$$
$$+ (2\,x - 3\,x^2\,y + x^3 - 2\,y + 3\,x\,y^2 - y^3 + 2\,z\,y + 2\,z\,x)\,\_Z^2 -$$
$$2\,x - 2\,y - 2\,z\,x + 2\,z\,y)$$
$$(x\,\mathrm{RootOf}((2\,x + 2\,z\,x + 2\,z\,y - 2\,y)\,\_Z^{10}$$
$$+ (-3\,x\,y^2 - 2\,x - y^3 - 2\,y - 3\,x^2\,y - 2\,z\,x - x^3 + 2\,z\,y)\,\_Z^8$$
$$+ (-3\,x\,y^2 + 3\,x^2\,y + 4\,y - 4\,z\,y + 3\,x^3 - 3\,y^3 - 4\,x - 4\,z\,x)\,\_Z^6$$

$$+(3x^2y+3xy^2+4y-3y^3+4x-3x^3-4zy+4zx)\_Z^4$$
$$+(2x-3x^2y+x^3-2y+3xy^2-y^3+2zy+2zx)\_Z^2-$$
$$2x-2y-2zx+2zy)^2$$
$$-x+y\,\mathrm{RootOf}((2x+2zx+2zy-2y)\_Z^{10}$$
$$+(-3xy^2-2x-y^3-2y-3x^2y-2zx-x^3+2zy)\_Z^8$$
$$+(-3xy^2+3x^2y+4y-4zy+3x^3-3y^3-4x-4zx)\_Z^6$$
$$+(3x^2y+3xy^2+4y-3y^3+4x-3x^3-4zy+4zx)\_Z^4$$
$$+(2x-3x^2y+x^3-2y+3xy^2-y^3+2zy+2zx)\_Z^2-$$
$$2x-2y-2zx+2zy)^2$$
$$+y)\Big/(\mathrm{RootOf}((2x+2zx+2zy-2y)\_Z^{10}$$
$$+(-3xy^2-2x-y^3-2y-3x^2y-2zx-x^3+2zy)\_Z^8$$
$$+(-3xy^2+3x^2y+4y-4zy+3x^3-3y^3-4x-4zx)\_Z^6$$
$$+(3x^2y+3xy^2+4y-3y^3+4x-3x^3-4zy+4zx)\_Z^4$$
$$+(2x-3x^2y+x^3-2y+3xy^2-y^3+2zy+2zx)\_Z^2-$$
$$2x-2y-2zx+2zy)^4-1)$$

$$v0:=\ln(\mathrm{RootOf}((2x+2zx+2zy-2y)\_Z^{10}$$
$$+(-3xy^2-2x-y^3-2y-3x^2y-2zx-x^3+2zy)\_Z^8$$
$$+(-3xy^2+3x^2y+4y-4zy+3x^3-3y^3-4x-4zx)\_Z^6$$
$$+(3x^2y+3xy^2+4y-3y^3+4x-3x^3-4zy+4zx)\_Z^4$$
$$+(2x-3x^2y+x^3-2y+3xy^2-y^3+2zy+2zx)\_Z^2$$
$$-2x-2y-2zx+2zy))$$

З урахуванням одержаних значень u_0 і v_0, маємо нормальне рівняння гіперболічного параболоїда:

$$f_N=\sqrt{(x-2\sin u_0\cos v_0)^2+(y-2\sin u_0\sin v_0)^2+(z-\cos u_0)^2}\,. \quad (7)$$

На рис. 1 наведено пару поверхонь, паралельних гіперболічному параболоїду. Вони одержані шляхом проектування на простір *Oxyz* перерізів графіка одержаної нормальної функції $\xi=f_N(x,y,z)$ гіперплощинами рівня ξ = const. Доцільність використання maple-кодів в розв'язку системи рівнянь (6) можна пояснити наступним чином. Паралельні поверхні, як правило, є многолистими графічними образами, тому для їх опису доцільно застосовувати багатозначні функції в смислі Коші (на відміну від однозначних функцій за означенням Діріхле - Лобачевського). Багатозначні ж функції в компактному вигляді можна описати переважно за допомогою комплексних функцій.

А застосування maple-кодів забезпечує наявність у розв'язку комплексних функцій.

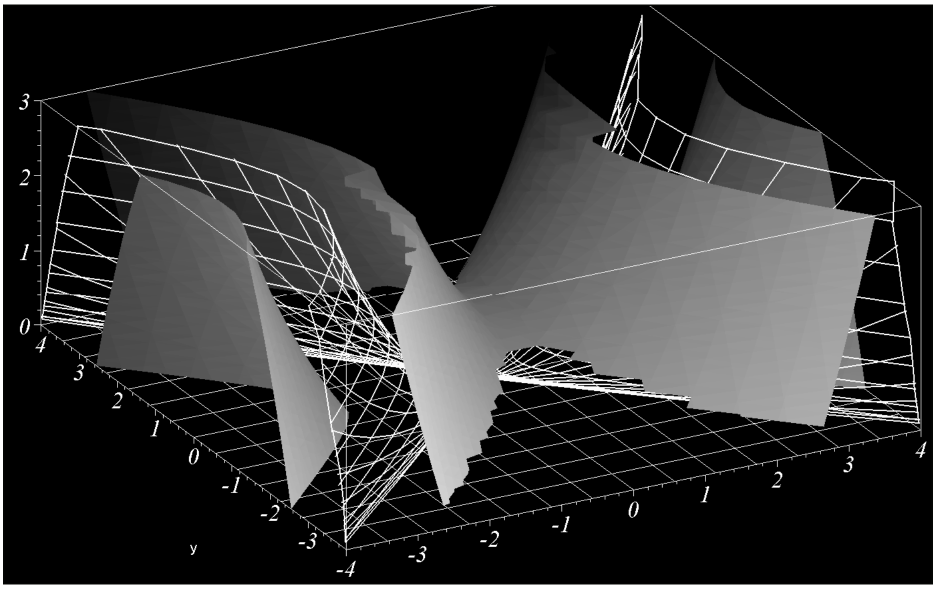

Рисунок 2 - Дві поверхні, паралельні гіперболічному параболоїду $\{x = 2\sin u\cos v;\ y = 2\sin u\sin v\ ;\ z = \cos u\}$ для $\xi = 0{,}5$

Зазначимо, що при необхідності, для опису розв'язку за допомогою радикалів до програми слід внести оператор **_EnvExplicit := true:**. Але досвід роботи з виразами, які містять радикали, показує, що при цьому необхідно перед радикалами коректувати знаки; контролювати правильність вибору яких можна за адекватністю побудованого зображення.

Висновки. Для аналітичного опису нормальних рівнянь поверхонь у випадку, коли початкова поверхня задана параметричними рівняннями, доцільно використовувати вирази, складені за допомогою maple-кодів. До цих позначень необхідно звикнути, як це відбулося, наприклад, з символами ln, sin, arcos, тощо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фахрутдинов И.Х. Ракетные двигатели твердого топлива. - М.: Машиностроение, 1981. - 218 с.
2. Гончарюк И.В., Рвачев В.Л. Нормальное уравнение чертежа.- В сб.: Вопросы теоретической кибернетики. - Киев: ИК АН УССР, 1965. - С. 200-210.
3. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. - Киев: Техніка, 1967. - 212 с.

4. Куценко Л.М. Визначення паралельних кривих як розв'язку диференціального рівняння ейконал // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. - Вип. 72. – С. 37-42.
5. Шоман О.В. Геометрическое моделирование поверхностей раздела двухфазных гетерогенных смесей // Вестник Херсонского государственного техн. Университета, 2002. - Том 15. - № 2. - С. 509-512.
6. Куценко Л.М., Шоман О.В. Метод опису паралельних поверхонь за допомогою нормальних функцій // Геометричне та комп'ютерне моделювання. - Харків: ХДУХТ, 2004. - Вип. 5. - С. 12-19.
7. Шоман О.В. Метод опису еквіфазних поверхонь гетерогенного процесу // Геометричне та комп'ютерне моделювання. - Харків: ХДУХТ, 2004. - Вип. 4. - С. 107-114.
8. Шоман О.В. Метод опису паралельних поверхонь як графічних проявів гетерогенних процесів // Геометричне та комп'ютерне моделювання. - Харків: ХДУХТ, 2005. - Вип. 13. - С. 105-114.

Получено 17.03.2006 г.

УДК 528.71

О.В.Реута

СТИСНЕННЯ БЕЗ ВТРАТ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ДВУВИМІРНОГО КОДУВАННЯ

Постановка проблеми

Процеси отримання проекційних зображень у сучасних системах дистанційного зондування земної поверхні здебільшого орієнтовані на збереження і передачу таких зображень у растровому форматі безвідносно до особливостей їх проекційної природи, що вносить значну інформаційну збитковість і знижує ефективність відповідних автоматизованих систем. Між тим в теперешній час мається значна кількість алгоритмів, методів і методик усунення такої збитковості, але в них також не враховуються особливості проекційних зображень зазначеного типу. Розв'язання зазначеної проблеми вбачається, з одного боку, у розробці таких форм подання растрових проекційних зображень, які б забезпечували можливість ефективного застосування сучасних алгоритмів стиснення, а з іншого — відповідна адаптація обраних алгоритмів.